KFAS | إحدى شركات Company | aspd التقدم العلمي للنشر

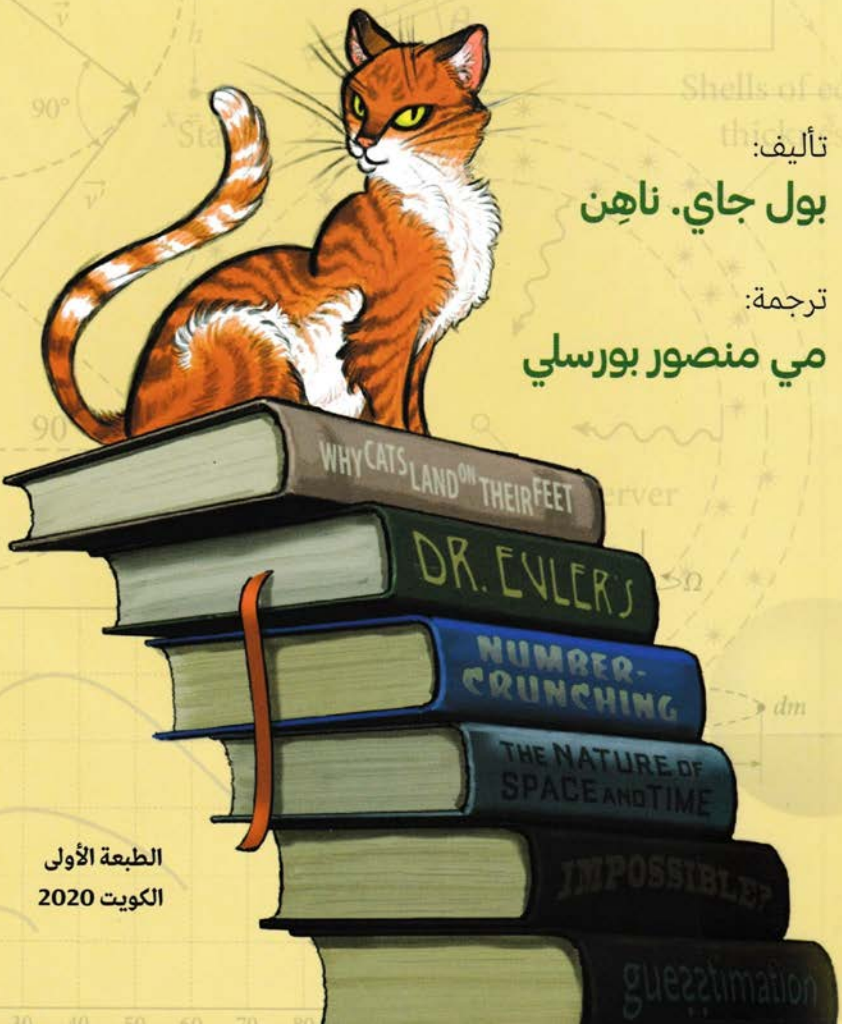
مكتبة 1355

في مديح الفيزياء البسيطة

العلم والرياضيات الكامنان وراء التساؤلات اليومية

تأليف:
بول جاي. ناهِن

ترجمة:
مي منصور بورسلي



الطبعة الأولى
الكويت 2020

In Praise of Simple Physics

The Science and Mathematics behind Everyday Questions

في مديح الفيزياء البسيطة

العلم والرياضيات الكامنان وراء التساؤلات اليومية

مكتبة | 1355

المؤلف: بول جاي. ناهِن Paul J. Nahin

لباتريشيا آن For Patricia Ann

ترجمة: مي منصور بورسلي

مراجعة: د. ليلى الموسوي

المراجعة العلمية: أ. تامر صلاح - أ. أنور طباع

KFAS | إحدى شركات Company | aspd التقدم العلمي للنشر

مؤسسة الكويت للتقدم العلمي

الطبعة الأولى - الكويت 2020

الكويت: مؤسسة الكويت للتقدم العلمي، 2020

ISBN: 978-9921-753-01-1

رئيس مجلس الإدارة

د. سلام أحمد العبلاني

نائب رئيس مجلس الإدارة والرئيس التنفيذي

د. ليلى الموسوي

الترجمة

مي منصور بورسلي

المراجعة:

د. ليلى الموسوي

المراجعة العلمية:

أ. تامر صلاح - أ. أنور طباع

التسويق

خالد الرشيدي

التدقيق اللغوي

فادي بدارنة

الغرافيك والتنضيد

خالد كلارجي - سكينة عبد الصمد

المتابعة والتنسيق

دانيا حداد

للتواصل subscriptions@kfas.org.kw ☎ +96522278100 داخلي 1514

aspd التقدم العلمي للنشر | احدى شركات KFAS Company

ص.ب. 25263 , الصفاة- 13113, دولة الكويت

بسم الله الرحمن الرحيم

المحتويات:

استهلال

الفيزياء هي خليط رائع من مكونات متنوعة. ولاتوجد مقاربة واحدة كافية للتعامل مع الطبيعة. فالتجربة والمشاهدة ضروريتان بالطبع، ولكن أيضا المفاهيم والصور والخيال والرياضيات والحدس الفيزيائي، وفوق ذلك كله الترابط المنطقي. ونحن مستكشفون في متاهة تقدم ألغازا في كل منعطف - ليست للقلوب الضعيفة!

إنّ تعلّم الفيزياء وتعليمها (وجهان لعملة واحدة)، فهما الشيء نفسه في كل مكان. فهناك مختبرات ومحاضرات لحل المسائل وعمليات حسابية بالحاسوب وكتب - أي مقاربة قد تساعدنا على الفهم. وتتخذ الكتب نفسها مقاربات مختلفة. فبعضها يتبنى أسلوب "من الأعلى إلى الأسفل" Top Down فيبدأ من القوانين الفيزيائية وبعدها يتوسّع إلى مسائل وتطبيقات. والبعض الآخر مبني على أساس تاريخي تُطوّر الفيزياء وفق تخيّل المؤلف لكيفية ابتكار الفيزياء أو كيف اختُرعت في حال لم يكن التاريخ الحقيقي مليئا بالتضليل والطرق المسدودة. وهناك كتب أخرى تقوم على "المفاهيم" Concepts متجنبة جميع المسائل الرياضياتية كما لو كانت وباء. ومع ذلك، فقد نجد بعض الكتب مليئة بالتحليلات الرياضياتية ولكنها فقيرة في المفاهيم والرسومات التوضيحية والتطبيقات. ولكل مقاربة مميزاتها.

وفي كتاب فِي مديح الفيزياء البسيطة *In Praise of Simple Physics* يأخذ بول ناهِن Paul Nahin شريحة مختلفة ومنعشة عبر الموضوع. فيُظهر لنا بعض المسائل المثيرة حقا لتطبيق المبادئ البسيطة في الفيزياء على الحالات الخاصة المتنوعة والأسئلة والألغاز.

وهنا مواضيع لا حصر لها: فنتعلم عن استخلاص المزيد من طاقاتنا من المصادر المتجدّدة في الفصلين: "الطاقة من الهواء المتحرك" و"الطاقة من المياه المتحركة". وهناك الفصل المستقبلي "الانتقال السريع في أنبوب عبور الدائرة العظيمة". كما نكتشف ماهي أفضل طريقة للإمساك بكرة البيسبول، وكيف نقيس الجاذبية الأرضية من مرآبنا، ولماذا تكون السماء مظلمة في الليل. وعلمنا عن الخطأ الذي ارتكبه إسحاق نيوتن العظيم نفسه. حتى أنّنا تعلمنا كيف نعرف أي مفاتيح الإضاءة الثلاثة في السرداب تتحكم في المصباح بالعليّة بمجرد صعود الدرج مرة واحدة فقط!

لقد تعلّمت الكثير من هذا الكتاب. فأنا أمارس الفيزياء وأُدرّسُها منذ مدة طويلة، ولكن هناك دائما الكثير لنتعلمه. فعلى سبيل المثال، لطالما استمتعت باستخدام التحليل البُعدي Dimensional Analysis للمساعدة على حل المسائل الميكانيكية عن طريق استلزام الترابط في الأبعاد الأساسية للكتلة Mass والطول Length والزمن Time في المعادلات. ومع ذلك، فإن العديد من الأمثلة الجميلة الموجودة في هذا الكتاب لم أرها من قبل!

وهذا الكتاب لا يتهرب من التحليل. فمن المتوقع أنّ تكون لدى القارئ خلفية مبدئية في حسبان الاشتقاق والتكامل. فلا يمكن تجاهل الرياضيات: إذا كان حل المسألة سيحتاج الأمر إلى حسبان تكامل أو اثنين، فلا يلوح ناهِن بعصاه السحرية ثم يقول: "الآن بعد تطبيق التكامل هذه هي النتيجة". بل ينخرط مباشرة ويُريك كل التفاصيل. لذا، إذا كنت متمرسا في الحسبان البسيط، فإنك تستطيع المرور بعجالة بهذه الأجزاء بينما تُقدّر طريقته المباشرة وواضحة التطور، أما إذا كنت مبتدئاً، فكل خطوة مدونة من أجلك لتقرأها حتى تتمكن من المتابعة ما لم تتعلمه جيدا من قبل أو ما قد نسيته.

إذا كنت قد قرأت أيّا من كتب ناهِن السابقة، فلن تتفاجأ بأن حتى هذا الكتاب مليء بالأمثلة المسلية واللطيفة، وفي بعض الأحيان المدهشة في العديد من المواضيع. وسواء كنت عالما ممارِسا أم شخصا عاديا مع امتلاك خلفية في بعض الرياضيات والفيزياء أو كنت طالبا في أي مرحلة (طالما لديك معرفة في الحسبان أوأنك راغب في التعلم)، ستستمتع بالخوض في الفصول الممتعة لهذا الكتاب.

تي. إم. هيليويل *T.M. Helliwell*
أستاذ فيزياء بيرتون بيتينغتون الفخري
Burton Bettingen Professor of Physics, Emeritus
كلية هارفي ماد *Harvey Mudd College*
في كلاريمونت *Claremont* بكاليفورنيا *California*
فبراير 2015

مقدمة بمسائل تحدٍ

"يجب أن تقدم الفيزياء كأبسط ما يُمكن.
وليست كأبسط شيء".
-آلبرت آينشتاين *Albert Einstien*

"تدريس الفيزياء الحرارية Thermal Physics
هي بسهولة الغناء: تعتقد أنك تجعلها أبسط
عندما تخطئ فيها قليلا".
-مارك زيمانسكي *Mark Zemansky*[1]

"الجدل الرياضياتي على أي حال
ماهو إلا فطرة سليمة منظمة".
-جورج داروين *George Darwin*[2]

طرحت ملاحظة فضولية عن كيفية تفاعل "الإنسان العادي في الشارع" (على افتراض أن هذا مفهوم ذو معنى) مع أي إعلان لأي اكتشاف علمي جديد ورائع. وعادة يكون اندهاشا ولكن أحيانا يكون ردة الفعل أكثر من اللازم. ومثال على ذلك الإعلان قبل بضع سنوات من فريق أبحاث لدى سيرن CERN (مختبر فيزياء الجسيمات عالية الطاقة الشهير بالقرب من جنيف Geneva) بأنهم رصدوا نيوترينوات Neutrinos أسرع من الضوء. وأتذكر ما كنت أفكر فيه عندما استمعت للتقرير منقطع الأنفاس على التلفاز- كان يجب على أحدهم إعادة معايرة أدوات القياس! (إذ اتضح أنه كان بسبب كابل سيئ التوصيل).

وأحد معارفي -من الدراسة الثانوية الذي ما زلت أتبادل معه رسائل عبر البريد الإلكتروني- كان ببساطة، وسط ذهولي، يقفز من الحماس. وهو محامي من حيث التخصص وأعتقد أنّ لديه القليل من الفهم للحجج الفيزيائية والرياضياتية التي تتضمنها النسبية الخاصة، وقد أُحبط مُراسلي عندما أجبت عن رسالة بريده الإلكتروني الحماسية برأي غير متحمس لما ورد في تقرير سيرن. وكرّرنا الموقف المحرج في السنة التالية، أي في 2012 – فكان مراسلي المشجع المتحمس وأنا المثير للسأم ومفسد الحفلات- عندما أعلنت سيرن عن احتمال اكتشاف بوزون

هيغز Higgs Boson (ما يُسمى الجسيم الإله The God Particle). وأعترف بأنني كنت أكثر رغبة في تصدي أن هذا الخبر صحيح. ولكنني كنت محتارا: لماذا هذا الشخص الذكي الناجح جدا في مسيرة مهنية تمتد إلى عقود كمحامي شركات رفيع المستوى لديه رغبة جامحة (بالفعل متلهف بالتأكيد) في الانضمام إلى ركب الحماس الذي يتضخم دوما عند كل إعلان فيزيائي مُذهل لكنه مبدئي.

وفي الحقيقة علي أنّ أعترف بأنّ زميل الثانوية ليس تائها علميا بقدر العديد من الأمريكيين. وفي مقال افتتاحي في المجلة الأمريكية *American Journal of Physics* (عدد أكتوبر 1996) اقتبس مايكل شيرمر Michael Shermer (مؤلف الكتاب المنشور في سنة 1997 لماذا يِصدقَ الناس أشياء غريبة *Why People Believe Weird Things*) استفتاء الرأي العام Gallup poll الذي أشار إلى أنّ أكثر من نصف البالغين الأمريكيين يؤمنون بالتنجيم Astrology، وأقل من النصف يصدّق أنّ الديناصورات قد عاشت مع الإنسان في زمن ما. وأنّ أكثر من الثلث يؤمنون بوجود الأشباح. وأشك في أنّ هذه النسب لم تتغير كثيرا منذ ذلك الوقت (وإن تغيرت، فالتغيير ليس للأفضل). وتفسيره لذلك كان: "لايريد [الناس] تقبّل...الواقع".

لذا، نشاهد الافتتان الشائع بالأشياء المذكورة في الاستفتاء العام، وتتساوى تلك مع الهراء الأحمق حول مثلث برمودا Bermuda Triangle، ووحش بحيرة لوخ نيس Loch Ness Monster، وذي القدم الكبير Big Foot، وبالتأكيد خرافة إخفاء الولايات المتحدة المزعوم لمركبة فضاء الكائنات الفضائية Alien Spacecraft في المكان الغامض، منطقة 51، (Area 5) بالقاعدة الجوية السرية في نيومكسيكو. ويحب صانعو أفلام هوليوود Hollywood مثل هذه الأشياء السخيفة. ولِمَ لا؟ فهي تجلب لهم الكثير من الأموال من السذج، والعديد من أفلام الخيال العلمي لم تفعل أي شيء لإحباط المعتقدات العامة في "العلم"[3] المغلوط.

وبعد التفكير في ذلك لفترة، استنتجت أنّ هذا التحمس ينتج بسبب ظهور هذه الإعلانات كأنها سحر. فإذا كانت النيوترينوات تنتقل أسرع من الضوء، إذا، يارباه، فكل الأشياء العجيبة التي أدهشتنا في مسلسل ستار تريك *Star Trek* قد تحدث فعلا.، مثل لقاء الكائنات الفضائية الغريبة في المجرات الأخرى والسفر رجوعا بالزمن. والنتيجة البائسة التي توصلت إليها هي أنّ العديدين يشعرون بأن العالم اليومي هو بصورة ما يفتقد (أو على الأقل تنقصه) إلى الإثارة.

وقد أحزنني هذا الإدراك، غالبا بسبب أن ذلك غير صحيح على الإطلاق. فالعالم الذي نعيش فيه عجيب من دون الحاجة إلى الانغماس في التخيلات. ومعظم الناس – لو عرفوا فقط كيف يفكرون تحلِيلِيا *Analytacally* بكل ما يشاهدونه - يسلمون بالأحداث المذهلة والمدهشة ولكن المفهومة تماما.

وما يفتقد إليه الشخص الذي أتراسل معه، والذين هم في وضعيته نفسها، هو المعرفة بأساسيات الفيزياء والرياضيات. وهناك تقليد طويل في أمريكا لامتلاك المتعلمين مثل هذه المعرفة، وصولا إلى الأيام المبكرة للجمهورية. وكانت لأفكار نيوتن، التي كانت تدرس روتينيا في الجامعات الأوروبية والإنجليزية من منتصف 1700، تأثير قوي في الآباء المؤسسين Founding Fathers. على سبيل المثال، حاول فرانكين Franklin حقا مقابلة نيوتن عندما كان شابا في لندن، وكتب مأديسون Madison (طالب في جامعة برينستون Princeton) مقالة يقارن فيها عالَم شؤون الإنسان والطبيعة. ويمكن ربط تضمين جيفرسون Jefferson في إعلان الاستقلال

Declaration of Independance لقسم طويل عن "قانون الطبيعة" Natural Law بقراءته لكتاب المبادئ *Principia* لنيوتن ولكتابات آخرين (مثل لوكي Locke وفولتير Voltaire) الذين كانوا متأثرين بنيوتن على نحو مماثل.[4]

دعني أستعجل في طمأنتك بأن المعرفة التي أتكلم عنها *ليست* على مستوى دكتوراه عالم الفيزياء النظرية أو بمستوى نابغة في الرياضيات الذي يمتلك قدرة فوق العادة للتلاعب بالرموز المبطنة للرياضيات المتقدمة. والآن من الواضح إذا كنت تدرس ما يحدث داخل آلة زمن الثقب الدودي Wormhole Time Machine، أو ماكان الكون عليه 10^{-10} ثانية بعد الانفجار الكبير (العظيم) Big Bang، فإن فهما متقدما للنسبية العامة General Relativity، والكهروديناميكية الكميّة Quantum Electrodynamics، ونظرية الموتّر Tensor Theory سيكون بالفعل مفيد جدا. ولكن ليس هذا ما سنفعله في هذا الكتاب. فالمواضيع التي سنناقشها ستكون أكثر ألفة من دواخل الثقب الدودي أو تفاصيل الانفجار الضخم الهائل الذي كان الانفجار الكبير. وبدلاً من ذلك، سنفحص الأشياء التي نراها (أو قد نخطط إذا رغبنا في إجراء قليل من التجارب) في حياتنا اليومية.

أرجوك لا تسيئ فهمي – الفهم المتقدم للفيزياء الرياضياتية Mathematical Physics (شيء، أكرر، لن نحتاج إليه هنا) قد يفتح آفاقا عجيبة. وبعضها عجيب لدرجة أعتقد زميلي من الدراسة الثانوية الذي لايزال يتراسل معي قد ينفجر مجازا من الحماس (ويغمرني بعدها برسائل كثيرة عبر البريد الإلكتروني). خُذ بالاعتبار، على سبيل المثال، مقالة[5] ظهرت قبل ما يقارب 25 سنة، مستفتحة بهذه الكلمات الداعية للدهشة: "تخيّل حضارة كائنات فضائية غريبة تطوّرت داخل عازل ضخم، الذي يبرد ببطء. وافترض أنّه من غير المعلوم للساكنين أنّ العازل سيمر في مرحلة معدنية انتقالية تحت درجة حرارة معينة. وعبر قدر من الزمن سيتمكن ساكنو هذا العالم غير العادي من استنتاج قوانين الفيزياء والكيمياء. وحين يبرد العازل سيصبح معدنيا فجأة. وسيبدو لهؤلاء الساكنين أنّه حدث تغيير مفاجئ في القوانين الأساسية للفيزياء – مجالات الكهرومغناطيسية ذات المدى البعيد غير موجودة بعد الآن، وسيتغير الانتقال الموجي، إلخ. وبناء على الخصائص البيولوجية للسكان، فمن المحتمل أنّ قوانين الفيزياء والكيمياء الجديدة لن تعين على الحياة، وستكون المرحلة الانتقالية قاتلة حالا. فهل هناك أي احتمال لحدوث تغيير مفاجئ في قوانين الفيزياء بكوننا؟ وسيبدو مثل هذا السؤال مضحكا بسبب النموذج القياسي للتفاعلات الكهرومغناطيسية والتفاعلات الضعيفة Standard Model of Weak and Electromagnetic Interactions، *مثل هذا الانتقال حدث بالفعل*! [التأكيد بالخط المائل هو من وضع المقال الأصلي]".

وشرح المؤلفون أنّ هذا التحول في قانون الفيزياء حدث منذ زمن بعيد، مباشرة بعد الانفجار الكبير، الذي نتج منه القوانين المعروفة اليوم. ولكن هل يمكن لمثل هذا التغيير المفاجئ أن يحدث مرة أخرى؟ بناء على إحدى النظريات التي ناقشتها المقالة، الجواب هو نعم، إذا صار الفوتون Photon عديم الكتلة الذي نعرفه اليوم ضخما فجأة. ستكون إحدى التبعات أنّ موجات الراديو Radio Wave ستكون محدودة لمسافة *سنتيمتر واحد*! لذا، وبينما لاتزال قنوات التلفزيون المنزلي تعمل، إلا أنّ أجهزة الهاتف الخليوية، وأجهزة راديو السيارة والطائرة ورادارات التحكم في خطوط الطيران لن تعمل. وبالتوصل إلى هذه الاستنتاجات المخيفة، استكمل المؤلفون رحلتهم عبر عدة صفحات بفيزياء رياضياتية متقدّمة.

ولكن هذا ليس ما سنفعله هنا. فالمواضيع التي نوقشت في هذا الكتاب مماثلة جدا "للحياة الحقيقية". والفيزياء المطلوبة ستحتوي على مفاهيم أوليّة مثل مبدأ أرخميدس Archimedes' principle، وقانون أوم Ohm's Law، وقانون نيوتن للحركة Newton's Laws of Motion، وقوانين حفظ الطاقة والزخم Conservation Laws of Energy and Momentum، وحساب مركز الكتلة Center of Mass لمجموعة من الأجسام الضخمة، وتحديد عزم القصور الذاتي Moment of Inertia لأجسام هندسية بسيطة مثل الكرات المجوفة Hollow Spheres أو الأسطوانات Cylinders. (عندما نستخدم هذه المفاهيم، سأذكركم بالتفاصيل حين الحاجة إليها). والأدوات الرياضياتية التي نحتاج إليها ستكون: الجبر Algebra، وعلم المثلثات Trigonometry، والمتجهات Vectors، وبين فنية وأخرى بعض مبادئ حسبان Calculus السنوات الأولى من الجامعة. أي أتوقع منكم معرفة المواد التي يتقنها العديد من طلاب المرحلة الثانوية البارعين قبل الانتقال إلى المرحلة الجامعية. والآن، أحيانا سأستعين برياضيات أعلى قليلا من مستوى طالب السنة الجامعية الأولى (ربما السنة الثانية)، ولكن عندا أقوم بذلك سأحاول أن أكون أكثر لطفا في المناقشة - حتى تتمكن من تعلّم بعض الرياضيات الجديدة أيضا، إضافة إلى الفيزياء!

وبهذه الروح، أستذكر مرة قراءتي ما أسميه تعريف جوليا تشايلد/ رايتشل راي /Julia Child Rachel Ray للفيزياء، طبقا لحوار طالب في المرحلة الثانوية مع زميله سمعه المعلم مصادفة: "في البداية، خذ القليل من الجبر وأضف إليه حفنة من الهندسة Geometry. وبعدها أضف المزيد من الجبر، وحساب مثلثات، وبعض الأشياء التي لابد أن تكون رياضيات من مستوى ما يُدرّس في الجامعة. وإضافة إلى كمية من الكيمياء التي نسيتها وحتى بعض البيولوجيا.[6]... واخلطها ببعضها وستحصل على الفيزياء". ولكي ألتزم بمقولة آينشتاين، فقد حاولت جاهدا أن أبقي المناقشات بسيطة. ولكن ليس بالبساطة، التي تجعل البروفيسور زيمانسكي يتأسف عليها، فتكون ببساطة غير صحيحة. وقد يشكك بعض القراء في هذه النقطة ويكونون غيرمقتنعين كليا بأن مثل هذه الأدوات الأساسية تستطيع بالفعل شرح أمور معقدة وممتعة. وللرد على هذا القلق، سأمنحكم دفاعا دراماتيكيا. العمل العلمي الأكثر سرية للحرب العالمية الثانية Second World War كان القنبلة الذرية[7] Atomic Bomb، وأي حديث على الملأ عن طبيعة مثل هذا الجهاز كان طريقة مؤكدة للتورط في مشكلة خطيرة. ولتقدير حجم المشكلة، ضع بالاعتبار ماحصل بعد قصة خيال علمي قصيرة[8] ظهرت في بداية 1944. واحتوت القصة على تفاصيل مدهشة للقنبلة الذرية كقنبلة يورانيوم Uranium Bomb، جهاز U-235 يبدأ بالاشتعال من مفجر نيتروني. وكان ذلك صادما للعاملين في جهاز الأمن في واشنطن العاصمة Washington D.C. ومن القائمين على مشروع مانهاتن Manhattan Project (برنامج القنبلة الذرية الأمريكية كما أخطؤوا بتسميته عن قصد). وكان خطر التسريب الأمني كافيا ليتسلط مكتب التحقيقات الفدرالي FBI وفيلق المخابرات المضادة في الجيش الأمريكي U.S Army's Counter Intelligence Corps على كل من المؤلف ومحرر المجلة.[9]

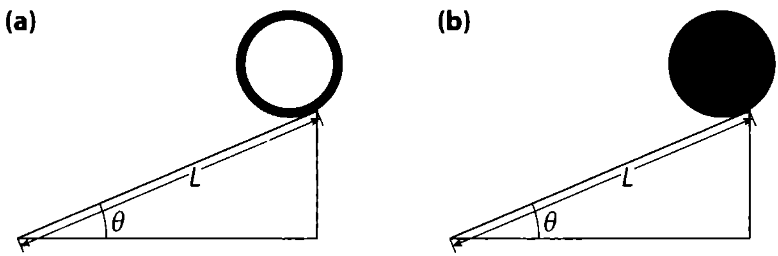
وبعد انتهاء الحرب، تراخت الأمور قليلا، ولكن مازالت هناك بعض الأمور التي لا يجب الخوض فيها. فعلى سبيل المثال، حالا وفور إلقاء القنابل الذرية على اليابان في أغسطس 1945، نشر هنري سميث Henry Smith (1898-1986)، رئيس قسم الفيزياء في جامعة برينستون Princeton

University، تقريرا بحجم كتاب بعنوان شرح عام لتطوير مناهج استخدام الطاقة الذرية للأغراض العسكرية *A General Account of the Development of Methods Using Atomic Energy for Military Purposes*. فعل ذلك بناء على وصية الجنرال ليسلي غروفز General Leslie Groves (1896-1970)، مدير مشروع مانهاتن، لخدمة المصلحة العامة (كما ادّعى). ولكن ليس كل شيء عن القنبلة كان في تقرير سميث. في الواقع، في مقدمة تقريره، حذر غروفز القرّاء من السؤال عن معلومات إضافية خارج ما طُبع وهدّد كل من يحاول ذلك بالملاحقة القضائية تحت قانون التجسس Espionage Act!

وأحد الأشياء المفقودة بشكل غامض كان حساب ما يسمى الكتلة الحرجة Critical Mass لقنبلة انشطار اليورانيوم ذي التفاعل المتسلسل للنيترون السريع Uranium Fast-Neutron Chain-Reaction Fission Bomb (أو الآلة *Gadget*، الكناية المستخدمة في لوس آلاموس Los Alamos للدواعي الأمنية)، وهي، أدنى كتلة لليورانيوم U-235 تنفجر تلقائيا. ومعرفة الكتلة الحرجة كانت حاسمة لهذه الجهود، فإذا تبيّن أنها كبيرة جدا لدرجة لا تصلح معها كسلاح محمول (بالطائرة)، إذا ببساطة لن يكون هناك أي داع لبناء الآلة. وكان قد أشير في التقرير بأنّ مثل هذه الكتلة قد تكون ما بين 1 و 100 كيلوغرام، ولكن القيمة الفعلية تُحُفّظَ عليها.

أما أفضل عالم فيزيائي نظري في ألمانيا خلال الحرب العالمية الثانية، ويرنر هايزنبيرغ Werner Heisenberg (1901-1976) – الذي مُنح جائزة نوبل Nobel Prize في الفيزياء في عام 1932 – فقد أعاق محاولات النازيين لبناء قنبلة ذرية عن طريق تقديم حسابات إجمالية خاطئة للكتلة الحرجة لليورانيوم U-235. فاعتُقِد أنها ستكون كبيرة جدا، بالأطنان. وكان هذا الخطأ قاتلا، في الحقيقة، وعلى الرغم من بداية سبقت الأمريكين بأكثر من ثلاث سنوات، لم يتمكن الألمان من الحصول على مُفاعل Reactor يعمل فما بالك بصنع قنبلة. والاعتقاد السائد اليوم هو أنّ هايزنبيرغ ببساطة لم يفهم كيف تعمل القنبلة الذرية فعليا. ولكن بعد الحرب العالمية وجد أنه من المناسب أن يدَّعي بأنه ارتكب "الخطأ" متعمدا بسبب الاعتراضات الأخلاقية لتطوير مثل هذا السلاح المُدمّر. ومعظم مؤرخي العلوم الآن يعتقدون أنّ ذلك غير صحيح، فهي قصة نشرها هايزنبيرغ ليُخْفي دعمه بكامل رغبته لجهود الحرب النازية وليشرح: هفوته[10] في أساسيات الفيزياء.

وبعدها، في 1947، ظهرت رسالة في المجلة الأمريكية للفيزياء *American Journal of Physics* وضحت، باستخدام براهين فيزيائية بسيطة ورياضيات المرحلة الثانوية، كيفية حساب الكتلة الحرجة "لتزن 2.5 كغم تقريبا".[11]



رسم توضيحي P1: أسطوانتان في بداية سباقهما.

وكاتب الرسالة، عالم فيزياء نظرية صيني هوف لو Hoff Lu (1914-1997) من الجامعة الوطنية في تشيكيانغ National University of Chekiang، كان مُحَصَّنا ضد تهديد غروف، بما أنّه استنتج ذلك كله باستخدام قوانين الفيزياء والرياضيات المعروفة فقط.[12] ولم يحصل على "معلومات سرية" من أي أحد يعمل في مشروع مانهاتن.

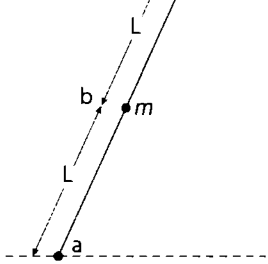
وتعتمد القيمة الفعلية للكتلة الحرجة على عوامل عدّة، وتشمل على نقاء اليورانيوم U-235 في الكتلة الانشطارية، وكثافة الكتلة وشكلها، وطبيعة غلاف احتواء النيترون Neutron containment shell (المسمى بالعاكس Tamper). وكانت القيمة التي توصل إليها لو أقرب من التي توصل إليها هايزنبيرغ بالتأكيد.

وما فعله لو هو ما سنفعله هنا، ولكن بشكل أقل دراماتيكيا. وما سأفعله في هذا الكتاب هو توضيح كيف كان عالم الرياضيات غي. إتس. هاردي G. H. Hardy على خطأ عندما صرّح قائلا: "[معرفة] القليل... من الفيزياء... ليس له أي قيمة في الحياة اليومية".[13]

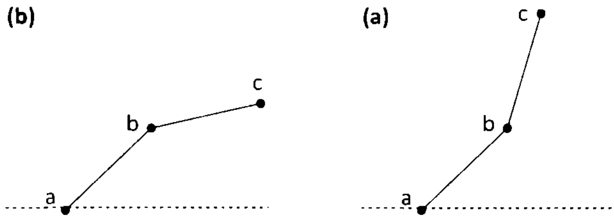
والآن للختام، هنا أربعة أمثلة سريعة لمستوى تعقيد الأسئلة التي سنفحصها.

لنفترض أنّ لدينا مستويين متماثلين مائلين، كما هو موضّح في الرسم P1، وأسطوانتين (مصنوعتين من المادة نفسها) ولديهما القطر والكتلة نفسيهما. وأحدهما بغلاف مجوّف، أسطواني، ورقيق الغلاف (أ)، بينما الآخر بغلاف مصمت (ب). ويمكننا تحقيق المطلوب بأن نجعل الأسطوانة المصمتة أقصر من المجوفة. والآن إذا أفلتنا الأسطوانتين في اللحظة نفسها، بحيث يبدأ كل منها بالتدحرج كل على مستواه تحت تأثير الجاذبية، فأي منهما سيصل إلى الأسفل أولا؟بماذا يُخبرك حدسك؟ هذا السؤال هو سؤال تكون الفيزياء المضطلعة فيه هي نفسها التي سنراها عندما ندرس طاقة المد والجزر في المحيط. سنحل هذا المثال تحليلِيا لاحقا في الكتاب، وسترى بعدها ما إذا كان حدسك على صواب. ولن يخبرنا النهج التحليلي أيهما سيفوز ولكن أيضا بالمسافة التي تغلب بها على الخاسر.

لنفترض أنّ لدينا قضيبين مستقيمين وصلبين بالطول نفسه L. ومتصلين ببعضهما في النقطة b، والقضيب الأدنى متصل بالأرض في النقطة a_1، كما هو موضح في الرسم P2.



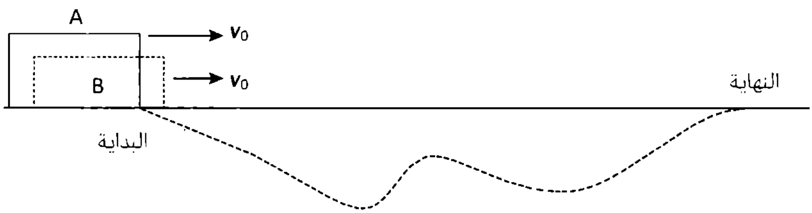
الرسم التوضيحي P2. الماسورة الواقعة



الرسم التوضيحي P3. كيف تنثني الماسورة؟

وتوجد نقطتان متساويتان من الكتلة m في النقاط b وc، بحيث إنّ كتل القضيبين مهملة مقارنة بالكتلة m (وسنعامل القضيبين كأنهما عديمي الكتلة). وابتداءً باصطفاف القضيبين كما هو موّضح في الرسم التوضيحي P2، مائلاً قليلا عن المحور الرأسي، عندها سنترك التركيب يسقط. هل سيستمر الاصطفاف نفسه عند السقوط، أو هل ينثنِي في أحد الاحتمالين الموضّحين في الرسم P3؟ تحديدا، إذا حدث الانثناء، هل سيكون بالشكل الموضح في (a) أو (b)؟ بماذا يخبرك حدسك؟ هذا السؤال نموذج بسيط لسلوك ماسورة طويلة ورفيعة عند السقوط (فكّر بكل أخبار التلفاز التصويرية التي رأيتها للمباني القديمة التي تُهدم باستعمال المتفجرات القوية). سنجيب عن هذا السؤال تحليليا في الوقت نفسه الذي ندرس فيه المثال الأوّل.

يُظهر الرسم التوضيحي P4 مزلاجتين، A و B، على وشك البدء بالتسابق على مسارين (مختلفين) عديمي الاحتكاك. وكل منهما لديه سرعة أفقية v_0 خالصة. ومسار A أفقي دائما، بينما يمثل مسار B مسار أفعوانيا، ولكن لايرتفع أعلى من مسار A. فمن سيفوز بالسباق؟ (ستجد الحل في نهاية الفصل الأول).



الرسم التوضيحي P4. أي المزلاجين سيفوز في السباق؟

ينتقل قائد مركبة على طريق صعودا بميلان 8% (يرتفع الطريق 8 أقدام لكل 100 قدم للإزاحة الأفقية) يشاهد أمامه عابر طريق على خط مشاة مقترب ويضغط بشدة على الفرامل. وتُقفل العجلات، وتترك العجلات أثارا على الطريق بطول 106 قدم. والسرعة المفروضة على الطريق هي 25 ميل/ساعة. فهل كان قائد المركبة مسرعا؟ ولو كان الطريق منحدرا إلى الأسفل بنسبة 8%، كيف ستتغير إجابتك؟ (الأجوبة على هذه الأسئلة –انظر: الفصل الرابع- قد تكون لها آثار قانونية إذا اصطدمت السيارة بعابر طريق).

والآن بعد إعطائكم هذه الأمثلة للأشياء القادمة، فقد، بالتأكيد، فتحت الباب للسؤال الطبيعي، كيف اخترت ما سأضعه في هذا الكتاب؟ العالم اليومي مليء بالفيزياء المذهلة، بعد

كل هذا، سنحتاج إلى كتاب أكبر لذكر جزء صغير من هذا كله (ورافعة لحمله). لذا، بصراحة، ما سيكون في الصفحات التالية هو، إلى حد كبير، عشوائي، مقايضة بين ما أجده شخصيا مثيرا وبين هدفي لتحقيق نوعٍ من التوازن الذي يمثّل "الفيزياء اليومية".

وغياب بعض المواضيع قد يكون مخيفا للبعض: فلا يوجد شيء، على سبيل المثال، عن تأثير دوبلر Doppler Effect أو أنظمة الكتلة المتغيرة Variable- Mass Systems وهي مواضيع قد شملتها في قائمة محتوياتي الأصلية. وهي مواضيع مهمة، أكيد، مع ذلك، هذه ليست موسوعة للفيزياء ولكن، بدلا من ذلك، عينة من "الفيزياء البسيطة" Simple Physics.

لقد استبعدت دوبلر ببساطة بسبب اعتبارات المساحة، وأقصيت فقدان الصواريخ للكتلة المستنفدة من العادم، واكتساب قطرات المطر للكتلة عند سقوطها عبر الضباب، وأنظمة الكتلة المتغيرة لأنني توصلت إلى استنتاج أن "الفيزياء البسيطة" الخاصة بها ستكون أكثر تعقيدا مما أريد أن أعالجه هنا.

وعلى الرغم من ذلك، قد أضفت الفصل عن نظام الانتقال السريع Rapid- Transit System باستعمال أنبوب مفرغ مرفوع يتبع مسارا دائريا كبير، حتى ولو أنه يستخدم رياضيات متقدمة نوعا ما، وذلك لأنني قررت عدم حذفه لأنه مثير للاهتمام جداً.

وكرهت جدا حذف أنظمة الكتلة المتغيرة، لأنني خططت لإضافة القصّة الفكاهية التالية بخصوص الفيزيائي الأسكتلندي العظيم جايمس كليرك ماكسويل James Clerk Maxwell (1831-1879). وفي رسالة إلى صديق أرسلها من مختبر كافندش Cavendish Laboratory في كيمبريدج Cambridge، إنجلترا England في 15 فبراير 1878، كتب ماكسويل (كإجابة عن سؤال من صديقه): "لا أعرف كيف أطبّق [قوانين] الحركة على أجسام متغيرة الكتلة، لأنّه لا يوجد تجارب على مثل هذه الأجسام أكثر من الأجسام ذات الكتلة السلبية. وكل ما يُماثل هذه الأسئلة يجب أن تُعَنْوَن B 'كيمبريدج، ماس [تورية: إذ إن اللفظة الإنجليزية للكتلة واختصار ولاية ماساتشوستس هي Mass] وإرسالها إلى الولايات المتحدة".

وهذه الفقرة التي تبدو غريبة منطقية حال ما تستوعب أنّ ماكسويل كان مشهورا (إلى جانب فيزيائه) بامتلاكه حسّا فكاهيا. وما كان يقصده هو أنّ الاستفسارات التي تتعلق بتطبيق قوانين الحركة للأجسام ذات الكتل المتغيرة لا يجب أنّ تُعنون بـ Cambridge, Mass وإرسالها "إلينا". ولكنني أرى أنني قد أرفقك هذه القصة، لذا كل شيء على ما يرام.

وأحد أهدافي الرئيسية في كتابة هذا الكتاب كان دَحْضَ معتقد سائد وخاطئ تماما: الرياضيات هي مجموعة من النظريات الرياضياتية، والإثباتات وجداول ضرب مملة" (لإعادة صياغة تأكيد خاطئ جدا قد سمعته ذات مرة)، لذا لن ينتج منها معرفة جديدة بل تكرار للمعنى – *Tautology* هي طريقة مزيَّنة لقول "الدوران في حلقة". وعلى سبيل المثال، إذا اختُصرت كل معادلاتك بعد الانتهاء من التحليل الطويل والشاق، إلى أعلان أنّ 1 = 1، إذاً، هذا ليس خطأ، ولكنه أيضا ليس جديدا أو مثيرا حتى! أعتقد أنك ستجد أنّ كل فصل في هذا الكتاب أي شيء ماعدا الدوران في حلقة.[14]

الفصل الأول مُصمّم خصيصا ليكون اختبارا سريعا لك لترى ما إذا كان لديك الرياضيات التي تحتاج إليها لهذا الكتاب (هناك أيضا قدر من الخلفية الفيزيائية)، ويجب عليك قراءة الفصل التالي لترى أداءك. ولكن التالي هو اختبار بسيط وسريع لرياضياتك.

ماهي ردة فعلك على التالي، شاهدت مرّة على لاصق دعامة سيارة في نشاط رياضي في مدرسة ثانوية: "نحن العدد $\frac{1}{5}\log_{10}100$" ؟ إذا كنت محتارا، حسنا إذا... ولكن إذا ضحكت، فأنت ربما مستعد تماما لبقية هذا الكتاب.[15]

ملاحظات

1. كان مارك زيمانسكي Mark Zemansky (1900-1981) أستاذا أمريكيا بالفيزياء في جامعة سيتي كوليدج City College بنيويورك New York. وكان المؤلف المشارك لكتاب الفيزياء الجامعية *University Physics*، وهوكتاب ناجح بشكل خيالي ونشر لأول مرة في عام 1949 والآن في طبعته الثالثة عشر، وأن عدد لا يحصى من طلاب الكلية المستجدين من خمسينات القرن الـ20 حتى اليوم يتذكرونه بشغف (أو، في بعض الحالات، بخوف).
2. كان الفيزيائي الرياضياتي السير جورج داروين Sir George Darwin (1845-1912) ابن تشارلز داروين Charles Darwin -الشهير بنظريته في التطور Evolution- وأستاذ علم الفلك في جامعة كيمبريدج University of Cambridge.
3. لكتاب مفيد حول افتتان هوليوود المؤسف بالعلم التافه، انظر: توم روجرز Tom Rogers، فيزياء الأفلام الغبية المهينة: أفضل أخطاء هوليوود، والإخفاقات، وتدمير القوانين الأساسية للكون *Insultingly Stupid Movie Physics: Hollywood's Best Mistakes, Goofs, and Flat-Out Destructions of the Basic Laws of the Universe, Sourcebooks* (منشورات: Sourcebooks Hysteria، 2007). وهنا مثال على ما أتحدث عنه وليس موجودا في كتاب روجرز. ففي فيلم حرب النجوم Star Wars، طُمس الكوكب ألديران Alderaan على الفور من قبل أتباع الشر لدارث فيدر Darth Vader، وذلك باستخدام سلاح شعاعي أُطلق من نجمة الموت Death Star.
وإذا افترضنا أنّ ألديران هو توأم كوكب الأرض (نصف القطر والكتلة نفسيهما)، فإنّ الطاقة اللازمة لإجراء ذلك هي الطاقة المنبعث عنها في تفجير 5×10^{22} طن من مادة تي أن تي TNT. وهذا كثير من تي إن تي! والشيء الوحيد الذي يمكن أن يجعل هذا الوضع أسوأ هو أن يقال إن السلاح كان يستمد طاقته من بطارية ذات حجم D. (وآمل بأنّ قراءة ذلك لن يعطي المخرجين في المستقبل أي أفكار). ولمعرفة كيفية حساب الطاقة المطلوبة لتدمير كوكب، انظر: كتابي لحاف السيدة بيركنز الكهربائي *Mrs. Perkins's Electric Quilt* (منشورات: Princeton University Press، 2009، ص 150-152).
4. انظر، على سبيل المثال، آي. برنارد كوهين I. Bernard Cohen، العلوم والآباء المؤسسون: العلم في الفكر السياسي لجيفرسون وفرانكلين وآدامز وماديسون *Science and the Founding Fathers: Science in the Political Thought of Jefferson, Franklin, Adams, and Madison*، *W. W.* Norton، 1996ولقراءة أقصر هي لورقة أ.ب. أرونس A. B. Arons، "نيوتن والتقاليد السياسية الأمريكية،" "Newton and the American Political Tradition" المجلة الأمريكية للفيزياء *American Journal of Physics*، March 1975، صفحات. 209-213.

5. ماري أم. كرون Mary M. Crone و مارك شير Marc Sher، "تأثير الفراغ في البيئة The Environmental Impact of Vacuum Decay،" المجلة الأمريكية للفيزياء *American Journal of Physics*، يناير 1991، صفحات 25-32.
6. الفيزياء البسيطة وعلم الأحياء يشتركان فعلا. والمثال الكلاسيكي هو العلاقة بين الأيض Metabolism والقياس لتحديد حجم المخلوقات الحية الكبيرة (والصغيرة). تخيّل أن هناك طولا مميزا L لكل مخلوق حي "يقيس حجمه". ومن ثمّ، تتغير كتلة المخلوق كما L^3، في حين أنّ مساحة سطحها Surface Area تتغير كما L^2. الحرارة الأيضية الداخلية المولّدة من المخلوق تتغير كالكتلة (L^3)، في حين أن قدرة تبديد تلك الحرارة تختلف كما مساحة السطح (كما L^2). الآن، $\lim_{L\to\infty} \frac{L^3}{L^2} = \infty$ و $\lim_{L\to 0} \frac{L^3}{L^2} = 0$. وهذا يعني أن المخلوقات التي تصبح "كبيرة جدا" سوف تسخن (عندما ترى حصاناً يزن 1000 رطل يقف في المرعى في الطقس البالغ 30 فهرنهايت على الأرجح لن يكون غير مرتاح، في حين أن المخلوقات التي تصبح "صغيرة جدا" سوف تجمد. (هذه النقطة الأخيرة هي عيب أساسي في الفيلم الصادر عام 1957 الرجل المتقلّص العجيب *The Incredible Shrinking Man* وهو فيلم غفل عنه توم روجرز (ملاحظة 3) في كتابه الممتاز.
7. وكان هناك بالطبع العديد من المشاريع الفائقة السرية أثناء الحرب، بما في ذلك تحديد قنابل نوردن Norden Bombsight (التي قيل إنها قادرة على "توجيه قنبلة إلى فتحة برميل مخلل من على 20 ألف قدم") والرادار والتقنيات المضادة له، وفتيل تقريب قذيفة مدفعية، وفك شيفرات جهاز الترميز الألماني إنيغما Enigma German. ومع ذلك، أعتقد أنّ ألقنبلة The Bomb هي رقم واحد.
8. كليف كارتمل "Deadline," *Astounding Science Fiction*, March 1944, by Cleve Cartmill (1908–1964).
9. يمكنك أن تقرأ ما حدث بعد ذلك في مقال ("دعنا نسميها هواية "Let's Call It a Hobby) بقلم موراي لينستر Murray Leinster، الاسم المستعار لويليام إف. جنكينز William F. Jenkins (1896-1975)، في مجموعة من قصص الخيال العلمي التي حررها، قصص الخيال العلمي الرائعة *Great Stories of Science Fiction*، (منشورات: Random House, 1951).
10. انظر: فيليب بال Philip Ball، خدمة الرايخ: النضال من أجل روح الفيزياء تحت هتلر *Serving the Reich: The Struggle for the Soul of Physics under Hitler*، (منشورات: University of Chicago Press, 2014)؛ جيريمي بيرنشتاين Jeremy Bernstein، نادي هتلر لليورانيوم: التسجيلات السرية في قاعة المزرعة *Hitler's Uranium Club: The Secret Recordings at Farm Hall*، (منشورات: University of merican Institute of Physics, 1996)؛ عملية إبسيلون: نسخ قاعة المزرعة الأصلية *Operation Epsilon: The Farm Hall Transcripts*، (منشورات: University of California Press, 1993).
11. يؤدي الانشطار الكامل لكيلوغرام واحد (2.2 رطل) من U-235 إلى إطلاق طاقة تعادل 20 ألف طن من مادة تي إن تي. (انظر: المثال الأخير في الخاتمة للمزيد عن القنبلة).
12. "On the Physics of the Atomic Bomb," *American Journal of Physics*, November–December 1947, p. 513.

إن حساب لو يشبه إلى حد كبير ما أداه بناة الآلة الأمريكيين منذ عدة سنوات: انظر: Robert Serber, The Los Alamos Primer: *The First Lectures on How to Build an Atomic Bomb*, University of California Press, 1992, pp. 25–28. كان لدى الناس في لوس ألاموس حس فكاهة سوداوي حول عملهم: يذكر سيربر أنّ أحد تصاميم القنابل كان لقنبلة ضخمة جدا لدرجة أنها إذا فجروها، لكانت قد قتلت جميع من على الأرض، لذا لن تحتاج إلى أن تكون قابلة "للنقل". واتلق عليها اسم الفناء الخلفي Backyard لأنه لا يهم أين انفجرت، وهذا هو المكان الذي يمكنك أن تفجرها!

13. في كتابه الصادر في عام 1940 إعتذار عالِم الرياضيات *A Mathematician's Apology*. كان هاردي Hardy (1877-1947) واحدا من أعظم علماء الرياضيات في النصف الأول من القرن العشرين، وتأكيده هو مثال على قدرة الناس الأذكياء حقا على قول الأشياء قد يرغبون في وقت لاحق بأنهم لم يتفوهوا بها.
14. التكرار من دون معنى لا يقتصر على الرياضيات. مثالي المفضل هو شيء قد يتفوه به طالب خريج في الفيزياء (مشوش مؤقتا من اختبار الدكتوراه التمهيدي الشفهي) من غير تفكير أثناء تعافيه/ تعافيها من محنة الاختبار: "لم تحدث أشياء من قبل في التاريخ أكثر مما هي اليوم مما هي عليه الآن".
15. هنا سؤال عملي في الفيزياء والرياضيات أكثر جدية، لتفكر فيه. إذا كنت تقوم برحلة ذهابا وإيابا من A إلى B ومن ثم العودة إلى A، هل الرياح الثابتة التي تهب من A إلى B تزيد أو تنقص، أو تبقي إجمالي وقت السفر دون تغيير مقارنة بعدم هبوب الرياح؟ لا تُخمّن، أجرِ تحليلا رياضياتيا (أنها مجرّد جبر المرحلة الثانوية). ويُمكنك العثور على الجواب في نهاية الفصل الأول.

1 كيف هي رياضياتك؟

"ماذا ستكون الحياة من دون حساب سوى مشهد من الفظائع"؟
- سيدني سميث *Sydney Smith*[1] (في رسالة بتاريخ 22 يوليو 1835)

في هذا الفصل الافتتاحي سوف نناقش عدة أمثلة على نوع الرياضيات التي سنواجهها في أسئلة "الفيزياء البسيطة" التي قد (أو على أي حال يِمكن) تحدث في "الحياة العادية".

هذه هي الأسئلة التي أعتقد، أنه يمكن لأي شخص أن يفهم مغزاها ولكن تتطلب على الأقل بعض التفكير التحليلي للإجابة عنها. فأمثلة الرياضيات مختلفة جداً عن بعضها البعض، مع ميزتها فقط "الموحدة" Unifying (إذا كان بالإمكان استخدام هذه الكلمة) الوحيدة، ألا وهي التطور التدريجي المتزايد. والسؤال الأساسي الذي يجب أن تسأله لنفسك عند قراءة كل مثال، هل أفهم الحُجَج؟ إذا كنت تستطيع أن تقول نعم، حتى ولو لم تتمكن في البداية من الحل السؤال بالتحليل المفصّل بنفسك، فإن فهمك كافٍ للكتاب.

مثال 1

مثالنا الأول للتفكير التحليلي لا يتطلب أيٍ رياضيات مدرسية، بل بالأحرى، المنطق *Logic* وقليلا من المعرفة اليومية (المصابيح المضاءة تصبح ساخنة). فكر في ذلك أثناء حل بقية الأمثلة، وكما هي الحال مع مشكلة الرياح والطائرة في نهاية مقدمة الكتاب، سأعطيك الجواب في نهاية الفصل.

تخيّل أنك في منزل متعدِّد الطوابق مع ثلاثة مفاتيح كهربائية في الطابق السفلي ومصباح بقدرة 100 وات watt في العلية. فجميع المفاتيح الثلاثة لديها وضعان، ومحدّدة إما بتشغيل ON أو إطفاء OFF، ولكن واحداً فقط من هذه المفاتيح يتحكم في المصباح. ولا تعرف أي واحد. وجميع المفاتيح الثلاثة هي في البداية على وضع الإطفاء OFF. وطريقة واحدة لتحديد مفتاح التحكم هو الإجراء الواضح التالي: ضع أي واحد من المفاتيح على وضع التشغيل ON، ثم اذهب إلى العليّة لمعرفة ما إذا كان المصباح مضاء. وإذا كان كذلك، فقد انتهيت. وإذا لم يكن كذلك، عُد إلى الطابق السفلي، شغل المفتاح التالي، ومن ثم عُدْ إلى العليّة لمعرفة ما إذا كان المصباح مضاء. إذا كان كذلك، إذاً المفتاح الذي شغلته تواً هو الذي يتحكم في المصباح. إذا لم يكن المصباح مضاء، فإن المفتاح الذي لم يُشغّل بعد هو الذي يتحكم في المصباح. لذلك، من الواضح أنّه يمكنك معرفة أيّ

المفاتيح تتحكم في المصباح بعد رحلتين إلى العليّة على الأكثر. ومع ذلك، هناك إجراء آخر يضمن لك القدرة على اتخاذ القرار بمجرد رحلة واحدة فقط إلى العليّة. ما هو؟

مثال 2

لا يتطلب هذا السؤال أيضا إلى أيّ رياضيات حقيقية، وإنما، إلى التفكير المنطقي مرة أخرى (على الرغم من أنّه يتطلب فهماً مبدئياً للطاقة الحركية Kinetic وطاقة الوضع Potential Energy). فلنفترض أنك أطلقت رصاصة في الهواء من بندقية إلى الأعلى. ومع أخذ مقاومة الهواء بالاعتبار هل الفترة الزمنية التي تستغرقها الرصاصة في الذهاب إلى الأعلى أطول أم أقصر من الفترة الزمنية التي تستغرقها للسقوط إلى الأرض؟ قد تعتقد أنك بحاجة إلى معرفة تفاصيل قانون قوة سحب مقاومة الهواء Air-Resistance Drag-Force Law، ولكن الأمر ليس كذلك. وكل ما عليك معرفته هو أنّ مقاومة الهواء موجودة.[2] قد تفترض أنّ مجال الجاذبية الأرضية Gravitational Field ثابت على كامل المسار الرصاصة ذهابا وإيابا (يبقى نفسه، بغض النظر عن ارتفاع الرصاصة). كما في المثال رقم 1، فكّر في هذا السؤال أثناء حلّك بقية الأمثلة، وسأعطيك الإجابة في نهاية الفصل.

تلميح: الطاقة الكامنة هي طاقة الوضع (مع اعتبار سطح الأرض كمستوى مرجعي صفري، الكتلة m في الارتفاع h فوق السطح تمتلك طاقة كامنة نعبّر عنها mgh، حيث g هي عجلة الجاذبية، وتساوي تقريبا 32 قدم/ث^2)، والطاقة الحركية هي طاقة الحركة (الكتلة m تتحرك بالسرعة v تمتلك طاقة حركية نعبر عنها $\frac{1}{2}mv^2$).

مثال 3

هذا السؤال يتطلب قدرا من الرياضيات، ولكن فقط من نوع الحساب الذي ينطوي على الكثير من ضرب وتقسيم أعداد كبيرة. والحالة التالية هي الفرضية في قصة الخيال العلمي -المنشورة في عام 1956- "البعثة" Expedition لفريدريك براون Fredric Brown (1906-1972). وهناك 30 مقعدا متاحا في أول رحلة على متن سفينة الصواريخ لاستيطان المريخ Mars، مع الحاجة إلى ملء المقاعد عن طريق اختيار 30 شخصا عشوائيا من تجمع مكون من 500 رجل و 100 امرأة. فما هو احتمال أن تكون النتيجة (كما في القصة) رجلاً واحداً و 29 امرأة؟

سنبدأ بتخيل المقاعد الثلاثين المصطفة جنبا إلى جنب من اليسار إلى اليمين، ومن ثم نحسب العدد الإجمالي لطرق التمييز (نفترض أن كل شخص يمكن التعرف عليه بشكل فريد) لشغل المقاعد دون مراعاة لنوع الجنس من مجموعة 600 شخص. وهذا هو العدد، N_1 [3]

$$N_1 = (600)(599)(598)\ldots(571) = \frac{600!}{570!}.$$

بعدها، إذا كان N_2 هو العدد الإجمالي من الطرق المميزة لملء 30 مقعدا مع رجل واحد و 29 امرأة بالضبط، إذا الاحتمال الذي نسعى إليه هو $P = \frac{N_2}{N_1}$. نحسب $N2$ كما يلي:

هناك 30 طريقة مختلفة لاختيار المقعد لرجل واحد،

و

هناك 500 طريقة مختلفة لاختيار الرجل الواحد لهذا المقعد.

لذا،

$$N_2 = (30)(500)(100)(99)(98)\ldots(72) = 15{,}000\frac{100!}{71!}.$$

والإجابة الفعلية لسؤالنا هي إذاً

$$P = \frac{15{,}000\frac{100!}{71!}}{\frac{600!}{570!}} = 15{,}000\frac{(100!)\,(570!)}{(71!)\,(600!)}.$$

استخدم براون كلمة الفعلية لأننا لا نمتلك رقما واحدا لـ P بعد.

والكسور Factorials في هذا التعبير كلها أرقام ضخمة، والأرقام التي تكون كبيرة جدا للحساب المباشر على الآلة الحاسبة اليدوية (آلتي الحاسبة فشلت عند 70!). ولذلك، لجعل الأمور أكثر قابلية للإدارة، سأستخدم تقريب ستيرلنغ[4] $n!$: $n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$

ثم،

$$\begin{aligned}
P &= 15{,}000\frac{\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{100}e^{-100}100^{100}\right)\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{570}e^{-570}570^{570}\right)}{\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{71}e^{-71}71^{71}\right)\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{600}e^{-600}600^{600}\right)}\\
&= \left\{15{,}000e\sqrt{\frac{(100)\,(570)}{(71)\,(600)}}\right\}\left\{\frac{(100^{100})\,(570^{570})}{(71^{71})\,(600^{600})}\right\}\\
&= \left\{15{,}000e\sqrt{\frac{(100)\,(570)}{(71)\,(600)}}\right\}\left(\frac{100}{71}\right)^{71}100^{29}\left(\frac{570}{600}\right)^{570}\frac{1}{600^{30}}\\
&= \left\{15{,}000e\sqrt{\frac{(100)\,(570)}{(71)\,(600)}}\right\}\left\{\left(\frac{100}{71}\right)^{71}\right\}\\
&\quad\times\left\{\left(\frac{570}{600}\right)^{570}\right\}\left\{\left(\frac{100}{600}\right)^{29}\right\}\left\{\frac{1}{600}\right\}.
\end{aligned}$$

كل من العوامل في الأقواس المتعرّجة تُحسب بسهولة على آلالة الحاسبة اليدوية، والنتيجة هي:

$$P = 1.55 \times 10^{-23}$$

ومن ثمّ، فإنّ الفرضية Premise في قصة براون غير محتملة جدا. وبغض النظر عن ذلك، ولأنها غير محتملة جدا أن تكون قريبة من "لا يمكن أن تحدث فحسب"، إلا أنها ليست من المستحيل، فإنها قصة مضحكة جدا وتستحق تعليقاً إرادياً لعدم التصديق.[5]

مثال 4

المعادلات التربيعية Quadratic Equationsk نراها بشكل روتيني في الفيزياء الرياضياتية (سترى مثالا عن ذلك في الفصل 9)، وهنا مثال على المعادلة التربيعية من نوع من المسائل التي سيتذكرها العديد من القراء من حصة الجبر في المرحلة الثانوية. وقد يشعر بعض القرّاء بالارتياح عند معرفة أنها حُلت بشكل غير صحيح من قبل مارلين فوس سافانت Marilyn vos Savant في عمودها في مجلة باريد *Parade Magazine* في 22 يونيو 2014 (ولكن، إنصافا لها، اعترفت بزلتها بسرعة في عمود 13 يوليو بعد تنبيه بعض القراء اليقظين).

براد Brad وأنجلينا Angelina، عملوا معا، استغرقوا 6 ساعات لإكمال مشروع. وإذا عمل براد وحده، فسوف يستغرق 4 ساعات إضافية للعمل بالمشروع مما لو أنجلينا فعلت ذلك بنفسها. كم من الوقت سيستغرق المشروع إذا عمل به كل واحد لذاته؟

إذا كان لنا أن نستدل على وقت أنجلينا بـ x، ثم وقت براد بـ x + 4. وهكذا، معدّل أنجلينا للانتهاء من المشروع هو $\frac{1}{x}$ في الساعة، ومعدل براد هو $\frac{1}{x+4}$ لذلك، في 6 ساعات تنهي أنجلينا الجزء $\frac{6}{x}$ من المشروع، وبراد ينهي الجزء $\frac{6}{x+4}$ من المشروع. ويجب على هذين الكسرين أن يتساويا مجموع المشروع النهائي (لذا، يجب إضافة 1)، وهكذا $1 = \frac{6}{x} + \frac{6}{x+4}$.

بعد إجراء الضرب التصالبي، نحصل على $6(x + 4) + 6x = x(x + 4) = x^2 + 4$ أو $12x + 24 = x^2 + 4x$

أو

$$x^2 - 8x - 24 = 0$$

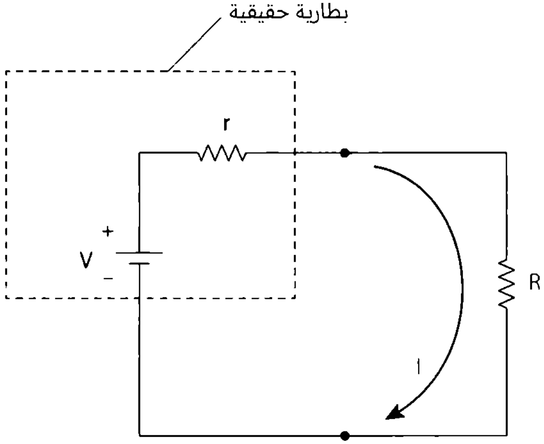
وتعطينا الصيغة المعروفة للمعادلة التربيعية

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 96}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{160}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{10}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{10}.$$

وبما أنّ x يجب أن تكون موجبة، نحن نستخدم علامة + (علامة السالب تعطي $x<0$)، وهكذا $x = 4 + 2\sqrt{10} = 10.32$. لذا، يمكن لأنجلينا إنجاز المشروع بنفسها في 10.32 ساعة، ويمكن لبراد أن ينجز المشروع بنفسه في 14.32 ساعة.

والافتراض الأساسي في هذا التحليل هو أنه عند العمل معا، يعمل براد وأنجلينا بشكل مستقل ودون تدخل. وليس هذا هو الحال بالضرورة، تبعا لطبيعة المشروع.

وعلى سبيل المثال، لنفترض أن "المشروع" العمل على توصيل شاحنة. وإذا كان يمكن لبراد أن يقود شاحنة من A إلى B بنفسه في ساعة واحدة، وإذا يمكن لأنجلينا أن تقود الشاحنة نفسها من A إلى B بنفسها في ساعة واحدة، كم من الوقت يستغرق الاثنان معاً لنقل الشاحنة نفسها من A الى ب؟ لاتزال ساعة واحدة! والأكثر فظاعة لإساءة استخدام المنطق هو الاعتقاد أنه إذا كان بإمكان حفر حفرة في 30 دقيقة، فإن 1,800 جندي يستطيعون حفر حفرة في ثانية واحدة!



رسم توضيحي 1.1 ما قيمة مقاومة R القصوى لتبديد الطاقة؟

مثال 5

بطارية حقيقية (مع مقاومة داخلية $r > 0$ أوم ohms)، مع وجود فرق جهد Potential difference بين طرفيها يساوي V فولت volts (عندما لا يتدفق تيار في البطارية)، موصّلة بالمقاومة R أوم كما هو مبين في الشكل 1-1. ماذا ينبغي أن تكون قيمة R، بحيث توصل أقصى قدر من الطاقة إلى R؟ وعادة ما تُحل هذه المسألة في الكتب المدرسية باستخدام حسبان التفاضل والتكامل Differential Calculus، ولكنّه مبالغة رياضياتية، لأن كل ما هو مطلوب هو جبر بسيط.

التيار I الذي يمر عبر الأسلاك (بموجب قانون أوم Ohm's Law-، انظر: ملاحظة رقم 1 في الفصل 8 إذا لم يكن هذا واضحاً)

$$I = \frac{V}{r + R}$$

والقدرة P المُبدّدة Dissipated (على صورة حرارة) في R هي (حيث E هي الانخفاض في الجهد الكهربي Voltageعبر R)

$$P = EI = (IR)\,I = I^2 R,$$

لتصبح

$$P = V^2 \frac{R}{(r + R)^2}$$

ومن الواضح أنّ $P = 0$ عندما $R = 0$ و $P = 0$ عندما $R = \infty$. ومن ثم، هناك R يقع بين الصفر واللانهاية، والذي تصل فيه P إلى أكبر قيمة لها. ويمكن بسهولة العثور على هذه القيمة

باستخدام حسبان التفاضل والتكامل (فاضل P فيما يتعلق R وعين النتيجة إلى الصفر)، ولكن كل ما هو مطلوب هو الجبر.

إليك الطريقة:

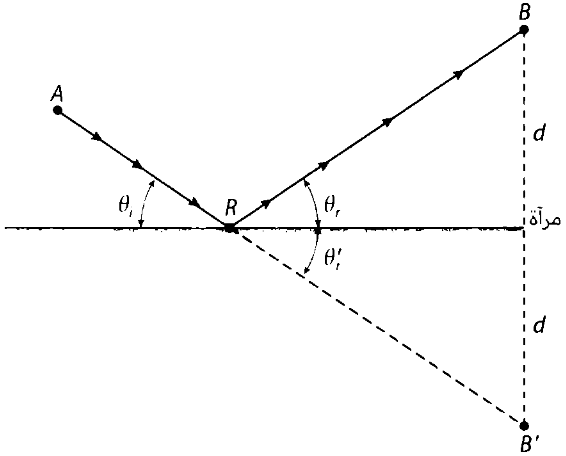
$$P = V^2 \frac{R}{r^2 + 2Rr + R^2} = V^2 \frac{R}{r^2 - 2Rr + R^2 + 4Rr}$$

$$= V^2 \frac{R}{(r - R)^2 + 4Rr} = V^2 \frac{1}{\frac{(r-R)^2}{R} + 4r}$$

ومن الواضح أننا نقوم بتكبير P من خلال تقليل المقام إلى أقصى اليمين من هذه المعادلة، والذي يحدث تماما كما هو واضح بالنسبة إلى $R = r$ (لأن ذلك يجعل المصطلح الأول في المقام ـ وهو لا يمكن أن يكون سالبا صغيرا قدر الإمكان، أي يساوي الصفر). ومن ثم، $R = r$، والقدرة القصوى في R هي $\frac{V^2}{4R}$.

مثال 6

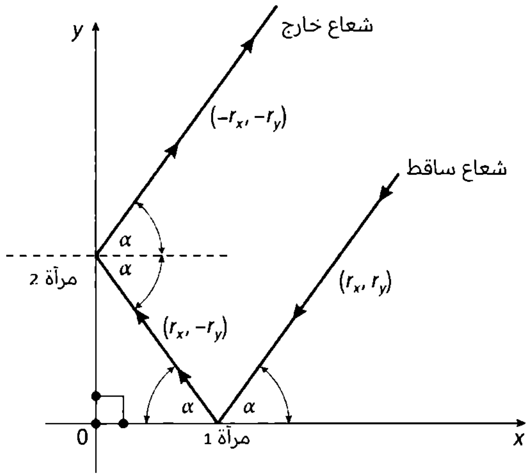
سترى، في هذا المثال، كيف تسمح الهندسة البسيطة، إضافة إلى الفيزياء، بقياس المسافة من الأرض إلى القمر بدقّة رائعة. ولتأسيس الفيزياء أولا، كل ما نحتاج إليه هو فكرة أن أشعة الضوء التي تسقط على المرآة تنعكس بزاوية تساوي زاوية السقوط، كما هو مبين في الشكل 1.2. وقد لوحظت هذه الظاهرة لأول مرة من قبل إقليدس Euclid، في القرن الثالث قبل الميلاد؛ ومع ذلك، لم تُفسّر إلا بعد مرور بضع مئات من السنين لاحقا، في القرن الأول الميلادي، عندما لاحظ هيرون السكندري Heron of Alexandria (في كتابه عن المرايا، كاتوبتريكا *Catoptrica*) أنّ قانون الانعكاس هو نتيجة اتخاذ الشعاع مسار ARB وهو الحد الأدنى لطول المسار المنعكس *Minimum Reflected Length Path*. وهذا يعني أنه إذا كانت النقطة R على المرآة، بحيث إنّ $\theta_i \neq \theta_r$، إذاً فإنّ طول المسار الكلي الناتج سيزيد. وكانت ملاحظة هيرون أوّل ظهور لمبدأ الحد الأدنى *Minimum Principle* في الفيزياء الرياضياتية، حيث تؤدّي مثل هذه المبادئ دوراً مهماً في الفيزياء النظرية الحديثة Theoretical Physics.



رسم توضيحي 1.2 هندسة قانون الانعكاس لهيرون Geometry of Heron's Reflection Law

وهنا برهان هندسي بسيط لتفسير هيرون لقانون الانعكاس من مرآة. وإذا كانت B، نقطة الهدف، والمسافة *d* فوق المرآة، فإن نقطة انعكاس B هي (*B*') وتبعد مسافة d "تحت" المرآة. *RB* و *RB*' هما إذاً أوتار Hypotenuses ذات أطوال متساوية لمثلثين متطابقين قائمين، الذي يعني، أنّ $\theta'_r = \theta_r$ π (بالإشارة إلى الشكل 1.2). والآن مجموع مسار الضوء هو *AR*+*RB* = *AR* + *RB*' وهذا المجموع الأخير هو طول المسار من A إلى *B*'. وأقصر مسافة من A إلى B' (وبذلك أقصر طول للمسار المنعكس أيضا) هي بمحاذاة خط مستقيم، وبعدها $\theta'_r = \theta_r$ والذي يؤكد أنّ $\theta'_r = \theta_r$. هذا فقط!

ولدى قانون الانعكاس الاستخدامات التالية في جهاز بصري يسمى العاكس الزاوي *Corner Reflection* (انظر: الشكل 1.3). وهذه الآلة مكّنت رواد فضاء أبولّو *Apollo 11* من المشاركة في قياس المسافة بين الأرض والقمر في عام 1969 بخطأ لا يتجاوز 2.5 مترا! يوصف مسار الشعاع الواقع على المرآة رقم 1 بالمتجه (r_x , r_y)، ومسار الشعاع المنعكس بالمتجه $(r_x , -r_y)$ [6]، حيث إن أحد مكونات متجه المسار معكوس بينما الآخر ليس كذلك، فالمرآة رقم 1 الواقعة على طول المحور السيني *x*-axis تعكس المركب الصادي *y*-component. والشعاع المنعكس يستمر إلى المرآة رقم 2، الواقعة على المحور الصادي، وهناك ينعكس المركب السيني لمتجه المسار، مما يعطي متجه المسار وصفا للشعاع المنعكس من المرآة رقم 2 لـ$(-r_x , -r_y) = -(r_x, r_y)$، ألا وهو المعكوس الكلي *Total reversal* لمتجه مسار الشعاع القادم. ولاحظ أنّ هذا يعني أن الشعاع المنعكس من المرآة رقم 2 يتوازي تماما *Perfectly Parallel* مع الشعاع الواقع على المرآة رقم 1 مائل قليلا ومعكوس الاتجاه. وهذه الشروط مستقلة عن قيمة الزاوية α.



رسم توضيحي 1.3 عاكس زاوي ثنائي الأبعاد

وهل يمكن لذلك أن يحدث في ثلاثة أبعاد؟ والإجابة هي نعم، ويمكن مشاهدة ذلك بسهولة عندما نمنح التفسير التالي لما تفعله المرآة العاكسة: تعكس المرآة مركب متجه المسار الواقع والعمودي على المرآة ويترك المركبات الأخرى من دون تغيير. (انظر: الاستعراض ثنائي الأبعاد وسترى أنّ ذلك ما حدث هناك). لذا، في حالة العاكس الزاوي ثلاثي الأبعاد (تخيل أن الزاوية الداخلية للمكعب مبنية من ثلاث مرايا مشتركة ومتعامدة بحيث تحدّد زاوية المكعب مركز محور السين x والصاد y والعين z للنظام الإحداثي)، تخيّل أنّ المرايا 1،2،3 تكون موازية للمستويات سين صاد xy، والسين عين xz وصاد عين yz بالترتيب. وبعدها الشعاع المنعكس عن المرآة رقم 1 انعكس مركبها العيني، والشعاع المنعكس عن المرآة 2 انعكس مركبها الصادي والشعاع المنعكس عن المرآة 3 انعكس مركبه السيني.

وبعد أن أتم الشعاع الواقع الانعكاسات الثلاث يخرج من العاكس الزاوي المكعب في اتجاه معاكس تماما.

والحالات الخاصة التي يسقط فيها الشعاع الوارد واحدة فقط (أو اثنتان) من المرايا هي، ببساطة، الحالات التي يصل فيها الشعاع الوارد الموازية لواحدة (أو اثنتان) من المرايا، وهكذا يحدث أن واحداً (أو اثنين) من مكونات متجه المسار يكون صفرا (وبطبيعة الحال، فإن عكس الصفر هو صفر). فقد وضع رواد الفضاء في أبولو 11 عواكس مكعبة متعددة الزوايا على سطح القمر، التي كانت بعد ذلك أهدافا لنبضات ليزر قصيرة جدا (بيكو ثانية[7] Picosecond) من الأرض.

وأرسل عاكس المكعب الزاوي النبضات المنعكسة مرة أخرى بدقة إلى المكان الذي أرسلت منه النبضات، كما أعطى الوقت المنقضي للانتقال ذهابا وإيابا، من الأرض إلى القمر ثم إلى الأرض، المسافة الفاصلة. وقد أظهرت هذه القياسات أن القمر يتحرك ببطء شديد بعيدا عن الأرض (مجرد بوصة ونصف في السنة)، وفي الفصل 10 سوف تتعلم لماذا.

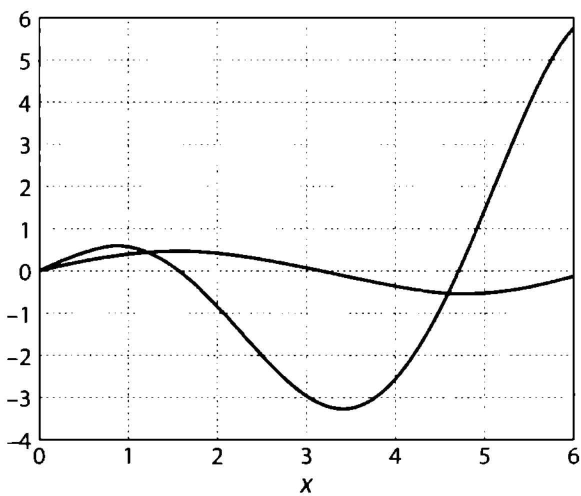
مثال 7

هنا مثال بسيط لحساب المثلثات Trigonometry من المرحلة الثانوية موضوع في ظروف فيزيائية مثيرة. ذكر روبرت سيربر Robert Serber في كتابه عن مشروع القنبلة الذرية الأمريكية (انظر: ملاحظة 12 في المقدمة)، هذه المعادلة:

$$x\cos(x) = (1 - a)\sin(x)$$

وهي إحدى المسائل النظرية التي درسها علماء لوس آلاموس، حيث a معامل ثابت مُعطى. لكل قيمة معيّنة لـ a ماهي الحلول الموجبة لـ x (الحلول التي تكون فيها $0 \leq x$ لم تكن ذات أهمية فعليا لمصممي القنبلة)؟

والطريقة الأكثر مباشرة للإجابة عن هذا السؤال هي ببساطة رسم جانبي المعادلة ورؤية أين يتقاطعان. وقد رُسم ذلك في حالة $a = \frac{1}{2}$ في الشكل 1.4، ونرى أنّ أول أقرب حل موجب $x \approx 1.2$، والتالي هو في $x \approx 4.6$. وبالتأكيد هناك عدد غير منتهٍ من الحلول الموجبة للرسوم البيانية بعد $x=6$ في الشكل 1.4. لقد استخدمت الحاسوب لإنتاج هذا الرسم بسهولة، ولكن يمكنك تقدير كيف يمكن لتقنيّ يحمل شهادة تعليم ثانوي ومجموعة من جداول الحساب أنّ يخطط بسهولة هذه الرسومات بيده. بالتأكيد سيكون عملا شاقا، وبعد فترة من معالجة العديد من القيم المختلفة للحد a لن يعود الأمر مثيرا للاهتمام، ولكن كان لدى علماء لوس آلاموس عدد كبير من العاملين المتاحين ممن خططوا لهذه الرسومات لهم طوال اليوم.



رسم توضيحي 1.4 حل $x\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$

مثال 8

إن لم تكن باي موجودة، فلن تكون هناك دوائر!
المؤلف، بعمر 10 سنوات، لاح له وحيه "العلمي" الأول.

الجميع "يعلم" بأن Pi π رقم أكبر قليلا من 3 (قريبا جدا من 22/7، كما أثبت أرخميدس Archimedes قبل أكثر من ألفي سنة) وبدقة أكثر إنه 3.14159265.... ولكن كيف نعرف قيمة π؟ هي نسبة محيط الدائرة إلى القطر، نعم، ولكن كيف يفسر ذلك أننا نعرف قيمة π إلى مئات الملايين، حتى التريليونات، من الأرقام العشرية؟[8] لا نستطيع قياس الأطوال بهذه الدقة. إذاً، كيف نحسب قيمة باي؟ الرمز π (باي) يظهر في عدد لا يحصى من المعادلات التي يستخدمها الفيزيائيون وعلماء آخرون ومهندسون، لذلك هذا سؤال مهم.

والجواب المختصر هو، خلال استعمال السلسة اللانهائية الموسعة Infinite Series Expansion. وعلى سبيل المثال، نحن نعرف (بعد دراسة حسبان المرحلة الجامعية الأولى) أنّ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

جدول 1.1
حساب باي ببطء.

عدد الأطراف	المجموع
100	3.1.......
1,000	3.14.......
10,000	3.141.......
100,000	3.1415.......

ولكن في حين أنّ

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

والذي يمكنك إما أن نشتقه بالقسمة المطوّلة الضمنية Implied long division أو فقط بتأكيد بالضرب التصالبي ببساطة، بعدها

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)\, dx = \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots\right)|_0^1.$$

وبعدها

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

هذه النتيجة[9] المشهورة هي صحيحة نظريا، ولكن، للأسف، هي أيضا غير مفيدة لحساب π لأنها تقارب ببطء شديد. كما كتب الرياضياتي العظيم السويسري المولد ليونهارد إيولير Leonhard Euler (1707 – 1783) في عام 1737 عن هذه الطريقة لحساب π: للحصول فقط على 50 رقم سيتطلب (العمل إلى الأبد) "labor fere in aeternum". ولتوضيح هذا الادعاء، يبين الجدول 1.1 بعض المجاميع الجزئية للعديد من القيم لأعداد التعابير المستخدمة في الجمع. كما تشاهد، يجب أن نزيد الرقم بمعامل 10(!) لتحديد كل رقم إضافي صحيح لـ π (تمثل النقاط النقطية حيث فشل المجموع الأول في إعطاء الأرقام الصحيحة). من الواضح أننا نحتاج إلى سلسلة تتقارب بشكل أسرع (أي تستعمل تعابير أقل للحصول على عدد معطى ذي أرقام صحيحة).

كما اتضح، ليس من الصعب إجراء هذا على الإطلاق، إذ إنّ المطلوب هو تغيير طفيف على ما قمنا به للتو. بكتابة

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)|_0^{1/\sqrt{3}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

لدينا

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3^3} + \ldots,$$

وبذلك

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \ldots\right).$$

هذه السلسلة تتقارب بسرعة كبيرة، ومجموع أول 10 عبارات فقط يعطي بشكل صحيح الأرقام الخمسة الأولى. استخدم الفلكي Astronomer الإنجليزي أبراهام شارب Abraham Sharp (1699-1651) أول 150 عبارة من السلسلة (في عام 1699) لحساب أول 72 رقما من π. هذا أكثر من كافٍ للفيزيائيين!

مثال 9

في يوم من الأيام كان الضفدع الذي كان ضعيفا في الرياضيات يجلس
على ورقة زنبق صغيرة في بركة كبيرة - ووسادة زنبق يتضاعف حجمها في كل ليلة -
وفي هذا اليوم غطّت فقط ثُمْن البركة. ولا يزال الضفدع يرى الغالبية العظمى من مياه
البركة الغزيرة، لذا كان لا مباليّاً. ثم، بعد ثلاثة أيام فقط، استيقظ ليجد البركة
قد اختفت بينما كان نائما.

- حكاية تحذيرية للضفادع الذين يدفنون رؤوسهم في الرمال

هنا تطبيق بسيط للحسبان في مسألة تثير قلقا حقيقيا في يومنا الحالي. لنفترض أن لدينا مصدراً غير متجدّد ومحدوداً يُستهلك بصورة ثابته بمعدّل متزايد. أي أنّ استنزاف المصدر يزداد باطراد. تحديدا، إذا كانت كمية المصدر المستهلكة اليوم هي r_0، ومعدل استهلاكه يزداد بمعدل ثابت، إذا لبعض k لدينا

$$r(t) = r_0 e^{kt}, \quad t \geq 0.$$

وهذا المصدر على سبيل المثال، النفط. وإذا كنا نعلم أنّ k، r_0 و V (كم يتبقى من المصدر)، بعدها يمكننا حساب الزمن (T) الذي يستغرقه حتى ينضب المصدر. وقيم r_0 و k لا يصعب قياسها في حالة النفط، ولكن قيمة V هي تخمين غالبا. ما كمية النفط المتبقية في العالم؟ سيقدم 10 "خبراء" مختلفين 10 إجابات مختلفة.

لنتخذ الاستهلاك الحالي للنفط $r_0 = 6 \times 10^7$ متر مكعب/اليوم و $k = \%7$ في السنة. والآن مهما نختار لقيمة V سيظهر شخص دائما ليقول إننا محافظون جدا. لذا، لنختار قيمة لن يستطيع أي شخص أن يدعي بأنها قليلة. لنفترض أنّ الكوكب بأكمله ليس إلا نفطا. لن يتمكن أحد من القول إن هناك "مكامن غير مكتشفه"!

إذاً، بأخذ نصف قطر الأرض 6.3×10^6 أمتار، سنحصل على حجم الأرض كالتالي:

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(6.37 \times 10^6)^3 \text{ متر مكعب } = 1.083 \times 10^{21} \text{ متر مكعب}$$

وهذا الكثير من النفط – لكن مازال كمية محدودة- ونسأل: كم المدة المتبقية لتنفد الأرض من النفط خارج عادم آخر سيارة؟

الكمية التفاضلية للنفط المستهلك في زمن التفاضل dt' هو $r(t')\,dt'$، لذا، الكمية المستهلكة من زمن $t'=0$ إلى زمن $t'=t$ هو

$$\int_0^t r(t')dt' = \int_0^t r_0 e^{kt'}dt' = r_0\left(\frac{e^{kt'}}{k}\right)\Big|_0^t = \frac{r_0}{k}(e^{kt} - 1).$$

أثناء $t = T$ الكمية المستهلكة هي، من التعريف، تساوي كمية النفط، V، الذي بدأنا فيه أثناء $t = 0$، ولذا،

$$V = \frac{r_0}{k}\left(e^{kT} - 1\right),$$

الذي نحله بسهولة لقيمة T بالفحص:

$$T = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kV}{r_0} + 1\right).$$

بما أنّ $k = 0.07$ للسنة = 1.92×10^{-4} باليوم، نحصل على

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1.92 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{1.92 \times 10^{-4} \times 1.083 \times 10^{21}}{6 \times 10^{7}} + 1\right) \text{days} \\ &= (5.208) \ln\left(0.3466 \times 10^{10}\right) \text{days} \\ &= (5.208)(21.966)\ \text{days} = 114,399\ \text{days} = 313 + \text{years.} \end{aligned}$$

فقط ثلاثة قرون و سيختفي كامل الكوكب. يا إلهي، قد يكون ذلك سيئا.

ولكن انتظر! اكتشف للتو رائد فضاء عائد أن هناك المزيد من النفط. القمر! القمر كله نفط أيضا! تصدح المدن حول العالم بفرح أصحاب السيارات الذين اعتقدوا أنّ عليهم تعلم ركوب الدراجة. لقد أُنقذ العالم – أم لا؟ مانحتاج إلى حسابه الآن هو، كم من الوقت سيزيد نفط القمر من قدرتنا على استهلاك النفط؟ بأخذ نصف قطر القمر كما 1.74×10^{6} متر، نحصل على حجم القمر كما

$$\frac{4}{3}\pi\,(1.74 \times 10^{6})^{3} \text{ متر مكعب} = 0.22 \times 10^{21} \text{ متر مكعب}$$

وهكذا، بدءا من الأرض والقمر، لدينا

$$V = (1.083 \times 10^{21}) \text{ متر مكعب} = 1.105 \times 10^{21} \text{ متر مكعب}$$

و

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1.92 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{1.92 \times 10^{-4} \times 1.105 \times 10^{21}}{6 \times 10^{7}} + 1\right) \text{days} \\ &= (5.208) \ln\left(0.3536 \times 10^{10}\right) \text{days} \\ &= (5.208)(21.986)\ \text{days} = 114,503\ \text{days.} \end{aligned}$$

لذلك، إذا كنا نستهلك ليس فقط الأرض وإنما القمر بأكمله، أيضا، سوف نحصل على 104 أيام إضافية. ثم حقا سنقول إنّ "الوقود قد نفد".

قصة الرياضيات التي قلتها قبل قليل لك تذكرني بطرفة مضحكة قالها المخترع الأمريكي الكبير توماس أديسون Thomas Edison.

كان أديسون رجلاً عملياً نال قليلاً من التعليم الرسمي، ولكنه يفهم قيمة التعليم ولم تفته قطّ فرصة لإظهار كيف يمكن للشخص الذكي أن يتحايل في كثير من الأحيان على النقص التقني. فعلى سبيل المثال، بعد توظيف عالِم رياضيات شاب كلفه أديسون بمهمة تحديد حجم مصباح إضاءة جديد، مصباح مصمم بشكل متموج؛ اختزل عالِم الرياضيات بعناية الشكل إلى معادلة معقدة ومن بعد جهد، وعلى مدى ساعات من الزمن، فاضَل المعادلة على ثلاثة أبعاد لحساب حجم المصباح. بعد ذلك عرض النتيجة بفخر على أديسون.

هنّأ أديسون الشاب لكونه عالم رياضيات جيداً جيداً، إذ توافقت إجابته المحسوبة مع القيمة التي توصّل إليها أديسون في أقل من 30 ثانية. وعندما سأل العالم المذهول كيف تمكن أديسون من عمل ذلك، (من دون أن يتفوه بكلمة) ملأ المخترع المصباح ببساطة بالماء وبعدها سكب الماء من المصباح في مخبار مدرج بأرقام للدلالة على حجم كل مستوى.

أوضح أديسون وجهة نظره: الرياضيات عظيمة، ولكن استخدِمها كأداة وليس كعكاز.

حل المثال 1

أدِر أيّ مفتاح لوضع التشغيل ON، واتركه لدقيقة أو نحو ذلك، وبعدها أطفئهOFF. وبعدها، أدر أي المفاتيح المتبقية لوضع التشغيل ON، واذهب إلى العلية، إذًا المصباح مضاء، إذا المفتاح الذي تركته مفتوحا يتحكم في المصباح. وإذا لم يكن المصباح مضاء، إلمسه. إذا كان ساخنا، إذاً المفتاح الذي شغلته ثم أطفأته يتحكم في المصباح. إذا كان باردا، إذاً المفتاح الثالث (الذي لم تشغله) يتحكم في المصباح.

هذه المسألة وطرفة أديسون، تذكرني بـ"نكتة تقنية" حمقاء يحب أن يرويها علماء الرياضيات: كم عدد علماء الرياضيات المطلوبين لتبديل مصباح؟ الجواب هو واحد. وهذا لأن عالم/عالمة الرياضيات سيُحيل المسألة ببساطة إلى مجموعة من الفيزيائيين الذين (كما يدعي علماء الرياضيات أنهم سيدارون سخريتهم وضحكاتهم) فمن المعروف لديهم أن الإجابة هي واحد. والميزة الوحيدة لهذا الاستهزاء الفاحش بالفيزيائيين هي أنها توضح الخدعة القوية في اختزال مسألة غير محلولة إلى مسألة حلها معروف بالفعل.

حل المثال 2

في طريقها إلى الأعلى تبادل الرصاصة طاقة الحركة Kinetic energ بطاقة الوضع Potential energy، إضافة إلى فقدها الطاقة بشكل لا يمكن عكسه بسبب سحب Drag الهواء. لذا، بينما تصل الرصاصة إلى أقصى ارتفاع لها، ستبدأ سقوطها مع طاقة وضع أقل من طاقة الحركة التي كانت تمتلكها عندما بدأت المسار إلى أعلى. والآن، أثناء السقوط، عند كل ارتفاع تتساوي طاقة الوضع بما كانت عليه قيمة طاقة الوضع عند كل ارتفاع مرت به عندما كانت تصعد. لذا، الطاقة المتبقية (طاقة الحركة) في كل ارتفاع هي أقل مما كانت عليه أثناء صعودها إلى أعلى. وهذا، عند كل ارتفاع والرصاصة تسقط، دائما تتحرك ببطء أكثر مما كانت عليه أثناء صعودها. لذا، السقوط إلى الأسفل يستغرق وقتا أطول من الصعود إلى أعلى.

حل مسألة المزلاجات من المقدمة

بالعودة إلى الشكل P4، نرى أنّ A لديه مركب سرعة أفقية Horizontal speed component يساوي v_0 (ومن دون مركب سرعة عمودي) في كل لحظة من الزمن. ففي حين أنّ B لديه مركب سرعة أفقية ابتدائية يساوي v_0 يزداد كلما تحرك نحو الأسفل، لأنه يتعجل Accelerated. لِمَ

يتعجّل؟ تبذل Exerts الكتلة Mass الموجودة على السطح الأفقي في وضع السكون قوةً Force على ذلك السطح، وهذا السطح يبذل قوة مساوية لها على الكتلة ولكن في الاتجاه المعاكس (إلى أعلى). وإذا لم تكن قوة ردة الفعل مساوية للقوة إلى الأسفل، ستتعجّل الكتلة ولن تكون في وضع السكون. وتنطبق هذه المعطيات عندما تتحرك الكتلة، ولكن بينما يتحرك الجسم B إلى الأعلى والأسفل موازيا لمساره المنحني، سيكون لقوة ردة الفعل مركب أفقي- إلى اليمين (الذي يُعجّل B) عندما يتحرك إلى الأسفل، وإلى اليسار (الذي يخفف من سرعة B) عندما يتحرك إلى الأعلى. وعندما يتحرك B باتجاه الأعلى سيقل مُركب سرعته الأفقية بالطبع عودة إلى v_0، ولكن ليس أقل من v_0 أبدا (تذكر، بغياب الاحتكاك). ومن ثم، مُركّب السرعة الأفقية للمزلاجة B هي، في كل لحظة، على الأقل بسرعة A، وبهذا يفوز B بالسباق. لاحظ أنّ هذا الاستنتاج صحيح مستقل عن تفاصيل مسار B (بفرض أنّ مسار B كما يطلق عليه علماء الرياضيات حسن التصرف *Well behaved*، أي لا يحتوي على زوايا حادة يمكن أن يصطدم بفعلها بجدار أو يقفز خارج مساره)، حتى ولو أنّه من الواضح أنّ هذا المسار هو أطول مسار.

حل مسألة في الملاحظة 15

لتكن d هي المسافة بين A وB، وs هي سرعة الطائرة في الهواء الساكن، وw هي سرعة الرياح. إذن، الزمن الكلي T للرحلة ذهابا وإيابا هو مجموع الأزمنة التي انقضت بالسفر مع أو عكس اتجاه الريح:

$$T = \frac{d}{s+w} + \frac{d}{s-w} = \frac{d\,(s-w) + d\,(s+w)}{(s+w)\,(s-w)}$$

$$= \frac{2sd}{s^2 - w^2} = \frac{2sd}{s^2\left(1 - \frac{w^2}{s^2}\right)} = \frac{2d}{s}\left[\frac{1}{1 - \left(\frac{w}{s}\right)^2}\right].$$

عند غياب الريح ($w=0$) تكون $T = \frac{2d}{s}$، وعندما تكون $w=0$ تصغر قيمة المقام بين الأقواس، ونحصل على $T = \frac{2d}{s}$. لذا، الرياح الثابتة تزيد دائما زمن السفر الكلي.

إليك طريقة خالية من الرياضيات لترى بالفحص الحالة الخاصة لـ $w=s$. وفي تلك الحالة فإن جزء رحلة العودة يضع الطائرة، بسرعة s، في مقابلة ريح بالسرعة نفسها. ومن ثم، لن تتحرك الطائرة؛ لذا لن تعود الطائرة أبدا إلى A (أي $T = \infty$ عندما $w=s$)

ملاحظات

1. سيدني سميث Sydney Smith (1771-1845)، وهو رجل دين إنجليزي، كان معلقا بارعا على الحياة بشكل عام.

2. كل ما سنفترض هو قانون قوة مقاومة سحب الهواء Air Resistance Drag Force Law $f(v)$، حيث v هي سرعة الرصاصة، هي معقولة فعليا. وهذا يعني أن هناك ثلاثة شروط: إذ (1) $f(v) > 0$ for $v > 0$, (2) $f(v) = 0$ for $v = 0$, and (3) $f(v)$ رتيبة وتزداد بازدياد v.
3. لقد كُتِبَت N_1 بصيغة المضروب: حيث n عدد صحيح موجب، إذاً $n! = (n)(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)$. فعلى سبيل المثال، $4! = 24$. والأقل وضوحا، إذا لاحظنا $n! = n\,(n-1)$ إذاً يمكننا أن نستنتج أنّ $0! = 1$. هل ترى ذلك؟ (جرّب $n=1$)
4. سُمِيَت على عالم الرياضيات الأسكتلندي جيمس ستيرلنغ James Stirling (1692–1770) ولكن اكتشفها فعليا في عام 1733 عالم الرياضيات الإنجليزي الذي ولد في فرنسا أبراهام دو موافر Abraham de Moivre (1667–1754). الرقم e هو، بالتأكيد، أحد أهم الأرقام في الرياضيات، بقيمة 2.7182818.... وهو تقريب أسيمتوتي Asymptotic Approximation لديه الخاصية في أنه في حين أنّ التقريب يحتوي على خطأ مطلقَ غير محدود، فإن الخطأ النسبي يقترب من الصفر. لهذا نستعمل العلامة ~ وليس علامة = ومن ثم، إذا كان $E(n)$ هو تقريب أسيمتوتي لأي دالة $f(n)$، إذا $lim_{n\to\infty}|E(n)-f(n)|=\infty$ ولكن $lim_{n\to\infty}\frac{|E(n)-f(n)|}{f(n)}=0$. قد تعتقد أنّ هذا أكثر من مجرد حساب ولكن، فعلا، يمكن البحث عنها في أي كتاب جيد للمعادلات والجداول الرياضياتية.
5. لن أفسد عليك القصة بالكشف عما يقودك براون في فرضيته، ولكن إذا كنت تتساءل، يمكنك أن تجد نسخة معاد طباعتها من "Expedition" في كتاب فانتازيا ماتماتيكا *Fantasia Mathematica* (تحرير: كلافتون فاديمان Clifton Fadiman, ed)، منشورات: Simon and Schuster, 1958. ولطالما تساءلت إذا كانت قصة براون ربما مستوحاة من الأغنية الناجحة في 1954 "ثلاث عشرة امرأة ورجل واحد في المدينة" Thirteen Women and One Man in Town التي أداها بيل هايلي Bill Haley العظيم وفرقة الكوميتس (المذنبات) Comets (وتحكي قصة خيالية عن رجل وحيد ناجٍ من الحرب النووية).
6. وصف متجه Vector مسار الشعاع يمكن اعتباره كمتجه موقع لفوتون مفرد في الشعاع.
7. والسبب وراء النبضات القصيرة هو سرعة الضوء المهولة. وينتقل الضوء مسافة واحد قدم في واحد نانو ثانية Nanosecond، لذا لينتقل الضوء لمسافة 1 بوصة يستغرق $\frac{1}{12}$ نانو ثانية. لإجراء قياس دقيق لتراجع القمر، يجب أن يكون التوقيت جزء صغير من $\frac{1}{12}$ نانوثانية.
8. من النادر أن يكون على الفيزيائيين والرياضياتيين والعلماء الآخرين معرفة أكثر من 5 أو 6 أرقام من العدد باي π، إذا لماذا تريليونات؟ مثال واحد للجواب يأتي من الرياضياتيين الذين يتساءلون عما إذا تتوزع أرقام π بشكل منتظم. وبشكل عام، أي هل تظهر كل الأرقام 0, 1, 2,... , 8, 9 و10% "بعشوائية"؟ يحتاج علماء الرياضيات إلى البلايين من هذه الأرقام لدراسة هذا السؤال "تجريبيا". (على حد علمي، أعداد π موزعة بشكل منتظم).
9. هي نتيجة عالم الرياضيات الألماني غوتفريد ليبنز Gottfried Leibniz (1646–1716)، الذي اكتشفه في عام 1674. كان ليبنز مفتوناً بمعادلته، معلقا عليه "الرب يحب الأرقام الفردية،" ومن الواضح تجاهله للمعامل الزوجي الأساسي للعدد 4.

2 معضلة الإشارة الضوئية

"تحوّل الضوء إلى الأصفر، ماذا يجب أن أفعل؟
هل أضغط على دواسة الوقود أو أدوس على الفرامل؟
الرحمة، أتمنى أن لا أقترف خطأ"!
-المؤلف

الأغنية الصغيرة التي في الأعلى (اعتذاري الخالص لجميع الشعراء الحقيقيين) تعكس المأزق الذي يواجهه بشكل منتظم كل من يقود سيارة. عادة، القرار واضح، ولكن أحيانا ليس واضحا. أو على الأقل ليس في الوقت المحدود المتوفر لاتخاذ القرار، ربما ليس أكثر من ثانية أو نحو ذلك. هل يجب أن "تستمر" وأن تأمل بأن تتمكن خلفيتك وخلفية سيارتك من عبور التقاطع قبل أن تصبح الإشارة حمراء، أو هل يجب أن تكبس دواسة الفرامل وتدعو ألا تتوقف ومقدمة سيارتك تقف خارج التقاطع؟[1]

والآن، دعنا أولاً نُراجع بسرعة الفيزياء البسيطة التي سنستخدمها في هذه المسألة. فإذا تحرك جسم بسرعة ثابتة V، إذاً، من الواضح أنّ المسافة المقطوعة s في الزمن T هو $s=VT$. ولكن إذا كان هذا الجسم يتعجّل بمعدل ثابت a، إذاً، سرعة الجسم في زمن محدد $t\geq 0$ هو

$$v(t) = V + at،$$

ومن ثم تكون المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية $0 \leq t \leq T$

$$s = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T (V + at)\, dt = VT + \frac{1}{2}aT^2.$$

وفي النهاية، لنفترض أن جسما يتحرك بسرعة V في زمن $t=0$ وبعدها بدأ بالتباطؤ بمعدّل ثابت b. فما هو الزمن المطلوب لإيقاف الجسم (لتقليل سرعته إلى الصفر)؟ سرعة الجسم هي:

$$v(t) = V - bt,$$

ومن ثم $v(t) = 0$ عندما $t = \frac{V}{b} = T$. وتكون المسافة المقطوعة خلال التباطؤ هي

$$s = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T (V - bt)dt = VT - \frac{1}{2}bT^2 = V\frac{V}{b} - \frac{1}{2}b\left(\frac{V}{b}\right)^2 = \frac{V^2}{2b}.$$

حسنا نحن الآن مستعدون للبدء.

من الواضح، يعتمد كله على عدد من العوامل، بما فيها السرعة التي تتحرك فيها، ماهي المسافة إلى التقاطع، وماهي العجلة Acceleration (وعجلة التباطؤ عند الضغط على الفرامل) التي تقدر عليها سيارتك، وكم من الزمن تبقى الإشارة صفراء، وردة فعلك، وعرض التقاطع، وطول سيارتك. وعقلك الذي كان يفكر قبل لحظة بما ستتناوله في العشاء عليه أن يبدّل التروس لحظيا ويحسب كل هذه العوامل ويقرّر بسرعة ماذا سيفعل. والعديد من الناس يفهمون أنه إذا كنت تقود بسرعة كبيرة حين تصبح الإشارة صفراء، فإن ذلك قد يتسبب في متاعب، ولكن الأشخاص أنفسهم غالبا ما يندهشون عند معرفة أن ذلك ينطبق أيضا عندما يسيرون ببطء، فمن المحتمل أن يجدوا أنفسهم في موضع صعب. وكلُ ما يؤدي إلى نشوء ما يُطلق عليه معضلة الإشارة الضوئية الشائعة جدا هو كله فيزياء ورياضيات (مع لمسة من الرسومات الحاسوبية Computer Graphics).

للبدء بالتحليل، لنذكر التعريفات التالية:

D = عرض التقاطع

L = طول السيارة

T = مدة الضوء الأصفر

R = زمن ردة فعل السائق

V = سرعة السيارة في لحظة تحول الإشارة إلى اللون الأصفر

a = عجلة السيارة تحت القوة

b = عجلة تباطؤ مكابح السيارة

بعدها، نضع بالاعتبار حالتين، A وB. ففي كلتا الحالتين، تبعد مقدمة السيارة فيهما عن التقاطع مسافة d عندما تصبح الإشارة صفراء.

الحالة A: يقرر السائق أن يُسرع عبر التقاطع. ولنجاح هذا القرار، يجب أن يعبر الجزء الخلفي من السيارة التقاطع قبل أن تصبح الإشارة حمراء. عندئذ، لينجح السائق في المحاولة،

$$VR + V(T - R) + \frac{1}{2}a(T - R)^2 \geq d + D + L.$$

ومعنى كل تعبير في هذا التباين كالآتي: على اليسار، التعبير الأول هو المسافة المقطوعة قبل ردة فعل السائق، والتعبير الثاني هو المسافة المقطوعة بعد ردة فعل السائق من دون عجلة، والتعبير الثالث هو المسافة الإضافية المقطوعة، نتيجة التسارع، بعد ردة فعل السائق. والتعابير الثلاثة على اليمين تُعطي مجموع المسافة إلى التقاطع، وعرض التقاطع، وطول السيارة، على الترتيب.

الحالة B: يقرّر السائق الضغط على الفرامل للتوقف. لينجح هذا القرار، لا يجب أن يدخل الجزء الأمامي من السيارة إلى التقاطع، ومن ثمّ:

$$VR + \frac{V^2}{2b} \leq d.$$

ومعنى كل التعابير كالتالي. على اليسار، التعبير الأول هو المسافة المقطوعة قبل ردة فعل

السائق، والتعبير الثاني هو المسافة المقطوعة أثناء كبح السيارة. والجزء الذي على اليمين ببساطة المسافة إلى التقاطع.

وتنشأ المعضلة عندما لا يستطيع السائق تحقيق أي من التباينات (عدم التساوي) Inequalities في A وB. والآن، من A وB لدينا على الترتيب،

$$d \leq VT + \frac{1}{2}a(T-R)^2 - D - L.$$

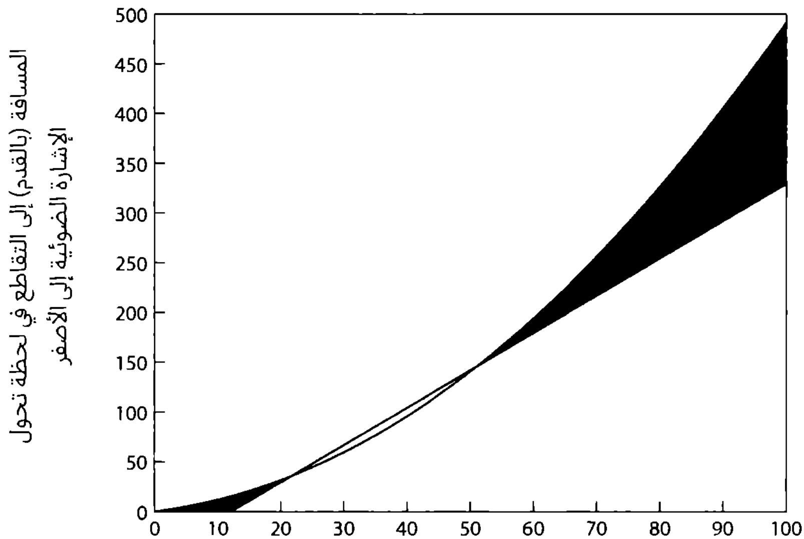
و

$$d \geq VR + \frac{V^2}{2b}.$$

وتحدث المعضلة عندما تُنتهك كلا التباينات: أي، عندما

$$\frac{V^2}{2b} + VR > d > VT + \frac{1}{2}a(T-R)^2 - D - L.$$

المناطق المظللة التي يُخترق فيها القانون



رسم توضيحي 2.1 معضلة الإشارة الضوئية

بعدها يصبح السائق فيزيائيا محكوم عليه باختراق القانون. سيتعدى هو/هي الإشارة الحمراء أو يقف في التقاطع عندما تصبح الإشارة حمراء.

لاحظ أن الجانب الأيسر من عدم التباين المزدوج هو مكافئ V، بينما الجزء الأيمن خطي في V. ولذا، إذا رسمنا كل جانب مع d على المحور الرأسي مقابل V على المحور الأفقي، عندها المنطقة التي تحت المنحنى المكافئ وفوق الخط هي المعضلة، كما هو موضح بالشكل 2.1 لمجموعة نموذجية للقيم المُعرَّفة للمسألة:

D = 45 قدم

L = 12 قدم

T = 3 ثواني

R = 0.75 ثانية

a = 3 قدم/ثانية تربيع

b = 12 قدم/ ثانية تربيع

وكما ترى، هناك اثنان من المناطق المظللة اللتان تمثلان المعضلة. والمناطق البيضاء هي حين يتحقق واحد أو اثنان من التباين. والمنطقة البيضاء العليا هي حين يستطيع السائق أن يضغط على الفرامل ليتوقف، والمنطقة البيضاء السفلى هي عندما يستطيع السائق أن يتسارع عبر التقاطع. والمنطقة البيضاء الرفيعة الواقعة بين الخط والمنحى المكافئ هي التي يستطيع السائق أن يؤديهما.

ملاحظات

1. هذه المسألة تظهر بشكل دوري في أدبيات الفيزياء وكانت موجودة في أشكال متنوعة لزمن طويل. صادفتها لأول مرة في ورقة كُتبت قبل أكثر من 50 سنة: Howard S. Seifert, "The Stop-Light Dilemma," *American Journal of Physics*, March 1962, pp. 216–218، ولكن الورقة التي اتبعتها بشكل دقيق هنا هي: Don Easton, "The Stoplight Dilemma Revisited," *The Physics Teacher*, January 1987, pp. 36–37. مسألة مشابهة عالجها سيفيل تشابمان Seville Chapman (ولكن ليست بهذه البساطة): "Should One Stop or Turn in Order to Avoid an Automobile Collison?" *American Journal of Physics*, February 1942, pp. 22–27.
2. إذا تغيرت "القوانين" المُعطاة في هذا التحليل، إذاً، على التحليل أن يتغير كذلك. فعلى سبيل المثال، في أريزونا Arizona يبدأ التقاطع من خط غير مرئي يحدد امتداد منعطف، ووضعك قانوني مادامت مقدمة سيارتك عبرت هذا الخط حين تصبح الأشارة حمراء. ولا يؤدي عرض التقاطع وطول السيارة دوراً هنا. وبالمثل، في كاليفورنيا، "ليس ضد القانون أن تتعمد أن تسير عبر الضوء الأصفر. ويعني الضوء الأصفر فقط أنّ المرور المواجه للإشارة 'يُحذّر' أنّ إشارة حمراء ستتبعها قريبا. "ولطالما دخلت سيارتك التقاطع أو عبرت ممر المشاة أو خط الحد قبل الإشارة الحمراء، لم تخترق القانون". يمكنك أن تجرب أن تعدّل التحليل الذي أجريته هنا وفقاً لقوانين أريزونا/ كاليفورنيا.

3 الطاقة من الهواء المتحرك

"حد بيتز هو أفضل ما يمكنك فعله".

- طريقة بسيطة التفكير لأفضلِ تذكرٍ لبيتز *Betz*

من الصعب الجدل ضد مقولة إنّ للهواء المتحرك الكثيرَ من الطاقة متى ما رأيت عاصفة هوجاء أو حتى شاهدت في الأخبار التدميرَ التامّ الذي يُخلّفهُ إعصار.

وللتوضيح اهدأ نوعاً ما على الأقل عند المشاهدة عن بعد، كل ما عليك فعله هو مشاهدة طائرة نفاثة ذات 250 طناً وكأنها تطفو إلى الأعلى عند الإقلاع. ومع كل المخاوف حول الطاقة هذه الأيام، فمن الطبيعي التساؤل عمّا إذا كانت هناك وسيلة ما للاستفادة من مصادر الرياح حول العالم. والإجابة هي نعم.

يمكننا التوصل إلى تقدير تحليلي لطاقة الهواء المتحرك بتخيل كتلة m من الهواء (فكّر في مكعب هواء، جانبه بطول s) تتحرك بسرعة v. وطاقة الحركة لهذه الكتلة هي $\frac{1}{2}mv^2$. وإذا تخيّلنا أن هذه الكتلة تتحرك عبر سطح متعامد لحركة الكتلة، من ثم تتحرك الطاقة $E = \frac{1}{2}mv^2$ عبر السطح في الفترة الزمنية $\Delta t = \frac{s}{v}$. والمعدّل الذي تعبرّ فيه الطاقة هذا السطح - بعبارة أخرى، القدرة P للريح - هي الطاقة لكل وحدة زمنية $\frac{E}{\Delta t}$، بذلك

$$P = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{s}{v}} = \frac{m}{2s}v^3$$

أي أنّ قدرة Power الريح تتغير بتغير مكعب سرعة الريح، وعندها، على سبيل المثال، فإنّ ريحاً بسرعة 120 ميل/ساعة هي أقوى بثماني مرات من الرياح التي بسرعة 60 ميل/ساعة (وليس فقط مرتين، كما يُعتقد الواحد بسذاجة).

والتحليل الكلاسيكي لأقصى استخلاص للطاقة من الريح، باستخدام توربين الريح، نُشر منذ أمد بعيد في عام 1920، من قبل المهندس الألماني آلبرت بيتز Albert Betz (1885-1968). وبيّن باستخدام الفيزياء البسيطة ورياضيات ابتدائية جدا، أنّ التوربين الهوائي (في أبسط شكل له، التوربين هو ببساطة أسطوانة مفتوحة من كلتا النهايتين، مع مروحة نصلية في الداخل) يمكن أن يحول الطاقة الحركية للهواء المتحرك داخله إلى طاقة مفيدة (مثلا، الكهرباء) بكفاءة

قصوى بنسبة 59.3%. وهذه القيمة الداعية إلى الفضول، سميت حدّ بيتز *Betz Limit*، يمكن التوصل إليها كالتالي.

لفهم الكيفية التي يستخلص بها التوربين الطاقة من الهواء، تخيل دخول الهواء من منفذ دخول التوربين (مع مساحة A) بسرعة v_i، وبعدها يواجه شفرات المروحة بسرعة منخفضة $v_f < v_i$ (وبذلك تبذل قوة على الشفرات، التي تحرك القضيب ليدور، وبدورة يحرك قضيب المولد الكهربائي)، وبعدها يخرج في النهاية من منفذ الخروج للتوربين (بمساحة A) مع سرعة مخفضة أكثر $v_o < v_f$. والقوة المبذولة على شفرات المروحة هي معدل تغيير زخم Momentum الهواء المتحرك،1 من دخوله حتى خروجه من التوربين.

إذا كتبنا ρ للتعبير عن كثافة الهواء (في وحدة كيلوغرام/متر مكعب)، حينما يصبح المعدّل الذي تعبر فيه كتلة الهواء (كيلوغرام/ثانية) خلال شفرات المروحة هي:

$$\mu = \rho A v f,$$

الذي يمكنك إثبات أن وحدته هي كيلوغرام/ثانية، ويُدعى هذا بتدفق الهواء *Air Flux* وأثناء دخول دفق الهواء إلى منفذ الدخول يحمل معه زخماً بمعدل μv_i، وحين يخرج دفق الهواء من منفذ الخروج يحمل معه زخماً بمعدّل μv_o. ومرة أخرى، يجب عليك تأكيد أنّ μv لديه وحدة الزخم لكل وحدة زمن (كيلوغرام. متر/ثانية. تربيع)، أي، للقوة Force.

من ثم، القدرة المبذولة على الشفرات هي

$$F = \mu v_i - \mu v_o = \mu(v_i - v_o).$$

وبما أنّ القدرة Power هي القوة مضروبة في السرعة،[2] تكون قدرة المروحة P_f هي

$$P_f = F v_f = \mu(v_i - v_o) v_f = \rho A v_f (v_i - v_o) v_f.$$

أو

$$P_f = \rho A v^2_f (v_i - v_o)$$

ويمكن التعبير عن قدرة المروحة أيضا كفرق بين معدل دخول الطاقة الحركية إلى منفذ الدخول ومعدّل خروج الطاقة الحركية من منفذ الخروج، وبذلك

$$P_f = \frac{1}{2}\mu\left(v_i^2 - v_o^2\right) = \frac{1}{2}\rho A v_f (v_i + v_o)(v_i - v_o).$$

وبمساواة طرفي P_f، يصبح لدينا

$$\rho A v_f^2 (v_i - v_o) = \frac{1}{2}\rho A v_f (v_i + v_o)(v_i - v_o),$$

أو

$$v_f = \frac{1}{2}(v_i + v_o).$$

وبهذا، سرعة الهواء على شفرات المروحة هي فقط معدل السرعات عند منفذ الدخول والخروج.

وباستعاضة هذا التعبير لـ v_f في أي التعبيرين (في هذه الحالة، أوّل واحد) قدرة المروحة نحصل على:

$$P_f = \rho A \frac{1}{4}(v_i + v_o)^2 (v_i - v_o),$$

أو

$$P_f = \rho A \frac{1}{4}(v_i + v_o)(v_i^2 - v_o^2).$$

جميع الحدود على الجانب الأيمن هي إما ثابتة (ρ و A) أو خارج إرادتنا (v_i). يمكننا، على الرغم من ذلك، التحكم في v_o، سرعة الهواء الخارجة، مع تصميم ميكانيكي ملائم للتوربين.

ولزيادة الحد الأقصى لـ P_f، نساوي اشتقاق P_f (بالنسبة إلى v_o) بالصفر:

$$\frac{4}{\rho A}\frac{dP_f}{dv_o} = \left(v_i^2 - v_o^2\right) + (v_i + v_o)(-2v_o) = 0$$

أو

$$(v_i - v_o)(v_i + v_o) - 2v_o(v_i + v_o) = 0$$

أو

$$v_i - v_o - 2v_o = 0$$

أو أخيرا،

$$v_o = \frac{1}{3}v_i .$$

وللقدرة القصوى للمروحة يجب أن تكون سرعة الهواء عند منفذ الخروج ثلث سرعة الهواء عند منفذ الدخول. وتحت هذا الشرط، فإنّ القدرة القصوى للمروحة، P_{fmax} تُعطى بـ

$$\begin{aligned} P_{f\max} &= \rho A \frac{1}{4}\left(v_i + \frac{1}{3}v_i\right)\left(v_i^2 - \frac{1}{9}v_i^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\rho A \frac{4}{3} v_i \frac{8}{9} v_i^2 = \frac{32}{108}\rho A v_i^3 = \frac{1}{2}\rho A v_i^3 \left(\frac{16}{27}\right). \end{aligned}$$

والآن بما أن $\frac{1}{2}\rho A v_i^3$ هي مستوى القدرة عند منفذ الدخول،[3] من ثم

$$\frac{P_{f\max}}{P_{\text{input}}} = \frac{16}{27} = 0.593.$$

وهي قيمة تسمى حد بيتز *Betz Limit*.

والآن ما نوع مستويات القدرة التي نتحدث عنها لتوربين ذي حجم معقول؟ على سبيل المثال، لنفترض أنّ لدينا توربينا يحوي منفذ دخول دائري قطره 100 قدم، يعمل في سرعة رياح تساوي 20 ميل/الساعة. وقد بيّنا للتو أنّ

$$\frac{P_{\text{input}}}{A} = \frac{1}{2}\rho v_i^3$$

ولذا، باستعمال الوحدات MKS (أمتار/ كيلوغرامات/ ثواني) لقياس v_i بالمتر/ثانية و A بالمتر تربيع، $\frac{P_{\text{input}}}{A}$ وحدات وات/ متر تربيع (من مساحة منفذ الدخول). ومع كثافة هواء من مستوى البحر ρ = 1.22 كيلوغرام/ متر تكعيب، نحصل على:

$$\frac{P_{\text{input}}}{A} = 0.61\, v_i^3 \text{ وات/متر تربيع}$$

أو باستخدام D كقطر لمنفذ الدخول الدائري (مقاس بالأمتار)،

$$P_{\text{input}} = 0.61\pi\,\frac{D^2}{4}\,v_i^3 \text{ وات} = 0.479 D^2 v_i^3 \text{ وات}$$

ويمكننا التحويل للوحدات الإنجليزية المألوفة أكثر لدى القراء الأمريكيين (أي، إلى ميل/ساعة لـv_i وقدم لـ D) كالتالي. بما أنّ المتر الواحد يساوي 39.37 بوصة = 3.28 قدم، وبما أنّ

$$1\text{ mph} = \frac{5280\text{ feet}}{3600\text{ seconds}} \times \frac{12\text{ inches}}{\text{foot}} \times \frac{1}{39.37\,\frac{\text{inches}}{\text{meter}}} = 0.447\,\frac{\text{meters}}{\text{second}}$$

التي تعني أنّ

$$1\,\frac{\text{meter}}{\text{second}} = \frac{1}{0.447}\text{ mph} = 2.24\text{ mph}$$

من ثم، عند قياس D بالقدم وv_i بالميل/ساعة.

$$P_{\text{input}} = 0.479 D^2 v_i^3\,\frac{(2.24)^3}{(3.28^2)^3} \text{ وات} = 4.3 \times 10^{-3} D^2 v_i^3 \text{ وات}$$

عندها، مع D = 100 قدم و v_i = 20 ميل لكل ساعة،

$$P_{\text{input}} = 4.3 \times 10^{-3} \times 100^2 \times 20^3 \text{ وات} = 344 \text{ كيلو وات}$$

عندها، لتوربين الهواء المُفترض "بيتز" الذي يمكننا أن نأمل بالحصول عليه (بافتراض أنّ

كفاءة التحويل هي 100% من الطاقة الميكانيكية إلى الطاقة الكهربائية) هي:

P_{input} =0.593 x 344 كيلو وات = 204 كيلو وات

لأخذ فكرة عن معنى ذلك في التعبير اليومي، لنأخذ بعين الاعتبار منزلاً حديثاً بخدمة كهربائية تساوي 200 أمبير/ 110 فولت مطلوباً منه قدرة قصوى تساوي 22 كيلو وات.

وهناك حساب مثير إضافي يمكننا عمله، بناء على النتيجة التي حصلنا عليها أنّ مستوى قوة الريح هو $\frac{1}{2}\rho A v^3$. لسيارة كهربائية تتحرك خلال هواء ثابت بسرعة v، "الريح" المؤثرة هي بسرعة v، وتنتج قوة سحب على المركبة. وبطارية السيارة يجب أن يكون بإمكانها توفير قدرة كافية للتغلب على قوة السحب Drag force هذه، وتكتب القوة عادة بالصورة $\frac{1}{2}\rho A v^3 C_D$، حيث C_D معامل السحب *Drag Coefficient* عديم الأبعاد الذي يأخذ بالاعتبار أي حركة انسيابية لشكل المركبة. لأغلب السيارات، C_D هو تقريبا $\frac{1}{2}$. لذا، للتغلب على سحب الهواء يجب على البطارية أن تنتج قدرة خارجة هي:

$$P = \frac{1}{4}\rho A v^3.$$

إذا أخذنا A تساوي 3 أمتار مربع للمساحة المعروضة الأمامية لسيارة ذات حجم جيد، v=50 ميل لكل ساعة (22.3 متر/ثانية)، إذن:

$$P = \frac{1}{4}(1.22)(3)22.3^3 \text{ watts} = 10,150 \text{ watts}.$$

والجهد الكهربائي Voltage لبطارية سيارة كهربائية في يومنا هذا هو نموذجيا بين 300 و 400 فولت، لذا فإن التيار المستمر المطلوب من البطارية للتغلب على سحب الهواء عند 50 ميل/الساعة هو بين 25 و34 أمبير. وإذا كان للسيارة أن تقطع مسافة 100 ميل، إذن في 50 ميل/الساعة يجب على البطارية أن تمد السيارة بهذا التيار لمدة ساعتين. والطاقة الكلية المطلوبة للتغلب على سحب الهواءفي 50 ميلاً/الساعة ل100 ميل هي[4]

$$10,150 \frac{\text{joules}}{\text{second}} \times 3,600 \frac{\text{seconds}}{\text{hour}} \times 2 \text{ hours} = 73 \cdot 10^6 \text{ joules}.$$

وهذه الكمية يمكن مقارنتها بالطاقة الكيميائية لغالون واحد من البنزين. ومن هذه القيم يمكنك أن تفهم أنّ القضية المهمة لمستقبل السيارات الكهربائية هي تطوير بطاريات مضغوطة يسهلُ شحنها ويمكنها أن تخزن كميات كبيرة من الطاقة، ومن ثم توصيل هذه الطاقة إلى محرك السيارة بمعدل في نطاق متعدد الكيلووات. (ملاحظة: 1 وات = 1 فولت x أمبير).

سأنهي هذا الفصل ببعض التعليقات على التأكيد الذي وضعته على الوحدات، وهذا ما سأفعله عبر هذا الكتاب. يتعامل الفيزيائيون مع كميات تشمل حرفيا كل شيء في الكون، من الأصغر إلى الأكبر، وبذلك يستعملون أكثر من نظام واحد للوحدات. والانتقال بسهولة بين الأنظمة المختلفة هي مهارة لا تُقدّر عامة خارج العلوم، وذُكّرت بذلك عندما استمعت إلى إعلان إذاعي في إحدى الليالي عندما كنت عائدا إلى المنزل بالسيارة وكان لتاجر في المعادن النفسية (الذهب والفضة). وقد ادّعى المُروّج أنّ على جميع المستثمرين امتلاك كمية من العملات المعدنية

مخزنة في السرداب[5] ("قد تصل الفضة إلى 50 دولاراً للأوقية مع نهاية العام – لا يَفُتكَ ذلك!"). وكان هدف الإعلان أن يجعلك تتصل للحصول على تقرير جميل (ونماذج مشتريات)، وليريك إخلاص التاجر (مهما كان ذلك)، إذا قمت بذلك، سيرسل إليك سبيكة فضة وزنها غرام واحد.

حسنا، ماهي قيمة ذلك؟ هناك 454 غراماً للجنيه، وبالتأكيد، 16 أوقية للجنيه، إذا أوقية واحدة من الفضة تساوي 28.4 غرام من الفضة. وإذا تمكنت الفضة من الوصول إلى 50 دولارا للأوقية، إذاً، 28.4 غرام ستساوي 50 دولاراً، ولذا غرام واحد من سبيكة الفضة يساوي 1.76 – وهذا، قيمة ثلاثة طوابع بريد الدرجة الأولى تقريبا (في 2016). أُفضِّل أن احتفظ بالطوابع البريدية، لأنه يمكنك استخدامها بالفعل.

ملاحظات

1. الزخم Momentum هو الكتلة Mass مضروبة في السرعة، mv ، Velocity، والقوة Force F معطاة (في حالة أن m ثابتة) بالمعادلة $F = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma$، حيث a هي العجلة Acceleration (ما يسمى قانون نيوتن الثاني للحركة Newton's second law of motion).
2. يمكنك رؤية تلك الأبعاد بكتابة الشغل Work (أو الطاقةEnergy) = القوة مضروبة في المسافة و بذلك $\frac{\text{energy}}{\text{time}}$ الطاقة/الزمن = القدرة = القوة ($\frac{\text{distance}}{\text{time}}$) (المسافة /الزمن)= القوة مضروبة في السرعة. وهذا يفسر أيضا، من أين أتت "الطاقة الحركية $\frac{1}{2}mv^2$ المألوفة". مع $F=ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$، و$F\frac{dx}{dt}$ = القدرة = $\frac{dE}{dt}$، حيث E هي الطاقة، يصبح لدينا $\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\} = m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = \frac{dE}{dt}$ ، و. $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2$
3. لأكون واضحا، الهواء مع دفق ρ يدخل منفذ الدخول خلال مساحة A بسرعة v_i. فالطاقة الحركية لهذا الهواء المتحرك، لكل وحدة كتلة، هي $\frac{1}{2}v_i^2$، ومعدل تحرك الكتلة هي$\rho A v_1$. من ثم الطاقة الحركية لكل وحدة زمن، هي، القدرة الداخلة. $P_{input} = \frac{1}{2}v_i^2\rho A v_i = \frac{1}{2}\rho A v_i^3$
4. وحدة MKS للطاقة هي جول *Joule*، حيث 1 جول/ثانية = 1 وات.
5. عندما سمعت أنني ذُكّرت بشخصية من كتاب فكاهي يدعى سكرودج مكدك Scrooge McDuck (خال دونالد دك Donald Duck) الذي يحب أن يسبح في حاوية نقوده ذات مساحة "ثلاثة فدان". الفدان المكعب لديه وحدات طول لأس 6 (l^6)، وهذا يجب أن يكون دليلا كبيرا على أننا تركنا العالم الحقيقي!

4 فيزياء متسابقي السّحْب والمحطة الفضائية

"إذا بدا كل شيء تحت السيطرة، فإنك لا تتحرك بالسرعة الكافية".

-ماريو أندريتي، بطل العالم في الفورميولا ون

Mario Andretti, Formula One World Champion driver

رياضة سباق السحب Drag Racing هي إحدى صور القدرة Power القصوى. انسَ الطاقم البارع في تغيير أربعة إطارات في زمن أقل مما تستغرقه الأغلبية للسير مرتين حول سيارتهم، والسائقون الماهرون والقادرون على الأداء عند مستويات التأهب القصوى من الوعي ولساعات تحت الإجهاد البدني الشديد. سباق السحب ليس كسباق إندي Indy 500. فسباق السحب المُنظَّم -على مدى ربع ميل (1,320 قدماً) مُقاس ويُجرى في وقت محدد- يكون حدثا من الماضي في بضع ثوان فقط. ولأقوى السيارات، من البداية إلى النهاية، فإنّ السباق لا يستغرق إلا أقل من سبع ثوان، والشيء "الوحيد" الذي يجب على السائق عمله هو التشبث بالمقود والقيادة في خط مستقيم، كل ذلك والسائق مربوط بآلة تطلق الدخان وتتسارع من البداية الساكنة إلى ربما 220 ميلا /الساعة وحتى أسرع.

وإذا انتقلت سيارة من نقطة الوقوف إلى نقطة تبعد s قدم في زمن t ثوان، وإذا افترضنا a عجلة ثابتة، إذاً $s = \frac{1}{2}at^2$. لذا، مع $s= 1.320$ قدم و $t= 6$ ثوان، نحصل على $a = 73.3$ قدم/ثانية تربيع. بما أنّ 1 g (جي gee) يساوي 32.2 قدم/ثانية تربيع، بفرض أن سائقنا اتخذ عجلة منتظمة هي 2.28 g فسيشعر/ أو تشعر بأن شخصا يزن أكثر منهم يجلس في حضنهم. بينما هذه المحصلة نتيجة مثيرة للإعجاب،إلا أنها ليست المحصلة القصوى. فهناك فئة خاصة من السيارات تدعى سيارات السحب على السكك *Rail Dragsters* هي أسرع سيارات تسارع في العالم. وتزن هذه الآلات أكثر من طن، ويمكنها الإندفاع عبر الربع ميل في أقل من 4 ثوان، وأن تصل إلى سرعات تفوق 325 ميلاً في الساعة مع عجلة تعجيل أكثر من 5 g.

سباقات السحب هي سباقات سرعة محضة، يُحدد الفائز فيها بعاملين: الوقت المستغرق، والسرعة النهائية عند اجتياز خط النهاية. وعدد كبيرة من المتغيرات يشارك في تحديد هذين العاملين، مثل المتغيرات المهمة الواضحة كوزن السيارة وقدرة المحرك بعدد الأحصنة، إضافة

إلى حجم الإطارات، وضغط الإطارات، واحتكاك الإطار بسطح الطريق، والعديد من العوامل الأخرى. لذا، إيجاد معادلة بسيطة لتوقع أداء السيارة هو حلم ميكانيكي سيارة السحب، وفي أواخر خمسينات وبداية ستينات القرن الـ20 ، نجح صحفي السيارات Automotive journalist روجر هنتينغتون Roger Huntington (1926–1989) على الأقل تجريبيا.

درس هنتينغتون الأداء الفعلي للعديد من سيارات سباق السحب، وبعد إجراء الكثير من الحسابات، خلص إلى القاعدة التالية لتنبؤ السرعة النهائية (المشار إليها بـ MPH)

$$\mathrm{MPH} = 225\left(\frac{\text{engine power}}{\text{car weight}}\right)^{1/3}$$

فتُقاس قدرة المحرك بقوة الحصان،[1] وزن السيارة بالرطل، فتكون MPH (لا توجد مفاجأة هنا!) هي بالميل/ساعة. في 1964 اكتشف الفيزيائي جيفري فوكس Geoffrey Fox كيف يشتق قاعدة هنتينغتون من الفيزياء البسيطة، وسأريكم هنا ماذا فعل.[2]

كتب فوكس الكتلة (ليس الوزن) للسيارة بالرمز m، وقدرة المحرك بالثابت P، وسرعتها في زمن t هي v. وطاقة الحركة للسيارة في زمن t هي $\frac{1}{2}mv^2$ ، وهنا يجب أن تكون الطاقة الكلية الناتجة من المحرك خلال الفترة الزمنية من 0 إلى t (إذا فرضنا أن كل طاقة المحرك تتحول لطاقة حركية، وبذلك نتجاهل الضوضاء وطاقة الحرارة المتولدة من هدير الوحش، إضافة إلى الطاقة الدوارة في أجزاء مثل الإطارات، العمود المرفقي Crankshaft، جهاز التعشيق Clutch، المكابسPistons)، هي كما يلي:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^t P\,dt' = Pt,$$

بما أنّ P ثابت. لذا، بالحل بالنسبة إلى v، نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = \sqrt{\frac{2P}{m}}t^{1/2}$$

إذاً، مدة السباق هي T وبما أنّ في نهاية السباق $v=$ MPH إذاً،

$$\mathrm{MPH} = \sqrt{\frac{2P}{m}}T^{1/2}$$

أو

$$T^{1/2} = \mathrm{MPH}\sqrt{\frac{m}{2P}}$$

المسافة التي قطعتها السيارة في زمن $T = t$ هي، من التعريف، $s=$ 1.320 قدم، ومن ثم

$$s = \int_0^T v\,dt = \sqrt{\frac{2P}{m}} \int_0^T t^{1/2} dt = \sqrt{\frac{2P}{m}} \left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right)\Big|_0^T = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m}}\, T^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m}} \left\{\mathrm{MPH}\sqrt{\frac{m}{2P}}\right\}^3 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m}}\,\mathrm{MPH}^3 \frac{m}{2P}\sqrt{\frac{m}{2P}}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{m}{2P}\mathrm{MPH}^3 = \frac{m}{3P}\mathrm{MPH}^3.$$

وهكذا،

$$\mathrm{MPH} = (3s)^{1/3}\left(\frac{P}{m}\right)^{1/3}$$

التي لديها نفس شكل قاعدة هنتينغتون التجريبية.

ومعادلة فوكس، كما هي، باستعمال وحدات MKS، تُعطي السرعة بالأمتار/ ثانية عندما نضع s بالأمتار، و P بالوات، و m بالكيلوغرامات. وعلى الرغم من ذلك، يريد ميكانيكيو سيارات السحب إدخال s بوحدة الأقدام وP بقوة الحصان و m بالرطل. من ثم، نحصل على الأمتار/الثانية على اليسار في معادلة فوكس، لسباق الربع ميل، بكتابة

$$\mathrm{MPH} = \left(3 \times 1{,}320 \times \frac{1}{3.28}\right)^{1/3}\left(\frac{746P}{w/2.2}\right)^{1/3}$$

ولأنّ هناك 3.25 قدم في المتر، و746 وات في قوة الحصان، و(على سطح الأرض) وزن كتلة 1 كيلوغرام هي 2.2 رطل. وبذلك،

$$\mathrm{MPH} = \left(\frac{3 \times 1{,}320 \times 746 \times 2.2}{3.28}\right)^{1/3}\left(\frac{P}{w}\right)^{1/3} = 125.6\left(\frac{P}{w}\right)^{1/3}.$$

فMPH بالمتر/ثانية. وللتحويل إلى ميل/ساعة، نستخدم التحويل

1 متر/ثانية = 2.237 ميل/ساعة،

وبذلك

$$\mathrm{MPH} = 125.6\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{w}}\right)^{1/3} \text{meters/second} = 2.237 \times 125.6\left(\frac{P}{w}\right)^{1/3}$$

$$= 281\left(\frac{P}{w}\right)^{1/3} \text{mph.}^3$$

ويبدو أن نظرية فوكس متوافقة مع نتيجة *هتنغتون* التجريبية، ولكن كما كتب فوكس بنفسه: "على الرغم من الاختلافات بين [281 الناتجة من النظرية و225 من التجربة الفعلية] لا تبدو كالاختلافات كبيرة، إلا أنه إذا عمل أحد على تكعيبها، سيجد أنّ 50% تقريبا من قوة النظرية هُدرت". وهذا، تكعيب، قاعدة *هنتينغتون*، الذي يصف كيفية أداء سائق سيارة سحب حقيقي، وتتنبأ بـ MPH أصغر من التي تتنبّأ بها معادلة نظرية فوكس، وكِلا *P* (المعدلية Rated *P* والفعلية Effective *P*) يرتبطان بالنسبة التالية:

$$\frac{\mathrm{P_{Huntington}}}{\mathrm{P_{Fox}}} = \frac{225^3}{281^3} = 0.51.$$

في ورقته البحثية استكشف فوكس العديد من الأوصاف النظرية الكاملة لسباقات السحب، ولذلك سأترك الموضوع عند هذا الحد بينما لا تزال الفيزياء "بسيطة".

ولكن قبل ترك هذا الفصل دعني أقُل القليل بعد عن الفرق الذي ذكرته سابقا بين الكتلة والوزن. (هذا سيعطيك أمثلة إضافية للتحويل بين MKS والوحدات الإنجليزية). فالكتلة هي قياس كمية المادة-حرفيا، عدد الذرات التي نتعامل معها. وهذا الرقم لا يتغير حين ننقل القطعة نفسها من بيئة جاذبية (سطح الأرض) إلى أخرى (الفضاء الخارجي). وما يتغير، علي الرغم من ذلك، هو وزن القطعة، وهي قوة الجاذبية التي تتعرض لها، كما هو مُعطى من قانون نيوتن الشهير *F=ma* (ومن المناسب أن تكون وحدة MKS للقوة هي نيوتن). فعلى سطح الأرض *a = g = 9.8* متر/ثانية تربيع، و *F = mg* هي الوزن، ولكن في المدار حول الأرض، حيث يتلاشى تأثير الجاذبية (المزيد من هذا لاحقا في الكتاب)، لدينا *F = 0*، والقطعة التي لدينا عديمة الوزن. وعلى سطح الأرض تزن كتلة 1 كيلوغرام 22.2 رطل، أي 9.8 نيوتن، ولذا للتحويل بين نيوتن ورطل هو 1 نيوتن = 0.225 رطل.

قبل ستين سنة ظهرت ملاحظة مثيرة في المجلة الأمريكية للفيزياء *American Journal of Physics* وضحت بشكل جميل الفرق بين الكتلة والوزن، توضيحا كان وقتها على حدود الخيال العلمي، ولكن منذ ذلك الحين صار رواد الفضاء على متن محطة الفضاء الدولية[4] International Space Station يشعرون بذلك روتينيا. وقد سُئلنا: "افترض أنك تعمل على محطة الفضاء ويجب عليك أن تتحكم في كتلة من 10 أطنان من أي نوع. وأنت 'تقف على' السطح الخارجي للمحطة (ذات الكتلة الكلية الكبيرة جدا) أمام حائط لا يتحرك. والكتلة تقترب منك بسرعة 1 قدم/ ثانية، مُهدّدة بسحقك بالجدار. والسؤال الأولي هو: هل تتوقع أن يكون بإمكانك إيقافها، أم يجب عليك إخلاء المنطقة!"

وأنهى المؤلّف ملاحظته بالادعاء: "بفرض أنّ إجراء التوقيف يحدث فقط تحت عجلة تباطؤ منتظمة وتحتاج إلى مسافة 3 أقدام (مسافة خطيّة Linear distance، وليس مشْخاً من الطبيعة)... المهمة المطلوبة يمكن تحقيقها ضمن الإمكانات الجسدية لشخص عادي، وقوّة بنحو 100 رطل تعمل لست ثوانٍ ستكون كافية". ولم يُقدّم المؤلّف الحسابات وراء هذا الادّعاء، ولكن إليك كيف كان له أن يقدم الحجّة.

أولاً: الإشارة إلى "الكتلة ذات 10 أطنان"، وهي، قطعة من المادة وتزن 20 ألف رطل على

سطح الأرض، سيكون من الأفضل (أعتقد) أن توصف بكتلة

$$\frac{20{,}000 \text{ pounds}}{2.2 \text{ pounds/kilogram}} = 9{,}091$$

والآن كتلة تتعرض لعجلة تباطؤ مستمرة من a، من سرعة ابتدائية V في زمن t=0، لديها سرعة

$$v = V - at$$

وبذلك تُختصر إلى سرعة صفر في زمن $T = t$، حيث

$$T = \frac{V}{a}$$

أثناء عجلة التباطؤ تقطع الكتلة مسافة

$$D = \frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}a\frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{2a}$$

ومن ثم

$$a = \frac{V^2}{2D}$$

الذي يُعطي

$$T = \frac{V}{\frac{V^2}{2D}} = \frac{2D}{V}$$

وبما أنّ $D = 3$ قدم و $V = 1$ قدم/ ثانية، لدينا $T = 6$ ثوان.
وبعدها، بما أنّ $F = ma$ لدينا

$$F = m\frac{V^2}{2D} = 9{,}091 \text{ kilograms } \frac{\left(1\frac{\text{foot}}{\text{second}} \times 1\frac{\text{meter}}{3.28 \text{ feet}}\right)^2}{2 \times 3 \text{ feet} \times 1\frac{\text{meter}}{3.28 \text{ feet}}}$$

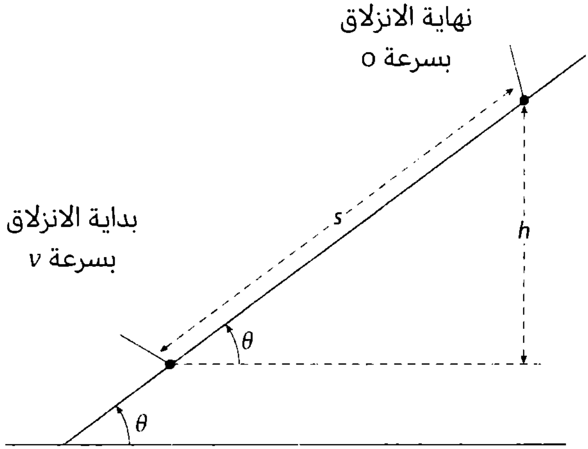
$$= 462 \frac{\text{kilogram} \cdot \text{meter}}{\text{seconds squared}}$$

$$= 462 \text{ newtons} \times 0.225 \frac{\text{pounds}}{\text{newton}} = 104 \text{ pounds.}$$

كما ادّعى المؤلف الذي نشَرَ في المجلة الأمريكية للفيزياء.

أخيراً، هذا مكان جيد لحل آخر سؤال تحدٍ الذي طرحته عليكم في مقدمة الكتاب، والذي يتعلق بالسيارة التي انزلقت. وسنستخدم فقط الفيزياء البسيطة التي ناقشناها من قبل، إضافة إلى أبسط الأفكار المتعلقة بالاحتكاك. الاحتكاك هو، بالتفصيل، عملية فيزيائية معقدة، ولكن لغاياتنا هنا يمكننا استعمال وصف رياضياتي ابتدائي يعطينا إجابات جيدة.

وُجد تجريبياً أنّه إذا تحركت كتلة m بسرعة v على سطح مستوي، هناك قوة تراجعية f (Friction) يُعبّر عنها بـ μmg، حيث μ ثابت موجب يسمى معامل الاحتكاك *Coefficient of* *friction*. لتقريب أولي، μ مستقلة عن كل من m وv. والكمية mg هي القوة (الوزن) العمودية على السطح، وفي الحالة العامة لسطح مائل بزاوية θ من الخط الأفقي، تساوي القوة العمودية على السطح $mg\cos(\theta)$، وفي حالة الإطار المطاطي المتحرك على سطح طريق إسمنتي وُجدت قيمة μ من التجارب أكبر عند دوران الإطار مما إذا لم يكن كذلك (أي أنّ الإطار ينزلق).[5]



رسم توضيحي 4.1 هندسة انزلاق بطول s

في الشكل 4.1 لدينا كتلة m تنزلق على طريق صاعد بزاوية θ عبر مسافة s حتى تتوقف. (للجزء الثاني من مسألة المقدمة التي تنزلق فيها السيارة نزولاً بزاوية $\theta < 0$). الصعود الرأسي للكتلة من بداية إلى نهاية الانزلاق هي h. وإذا كانت سرعة الكتلة في بداية الانزلاق هي v، إذا عندما تتوقف الكتلة عند نهاية الانزلاق تفقد الكتلة طاقتها الحركية ولكنها اكتسبت طاقة وضع. والطاقة المفقودة الكلية هي:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

التي يجب أن تكون الطاقة المُهدرة من قوة الاحتكاك Frictional force المبذولة على طول خط الانزلاق. لذا، بما أنّ الطاقة هي "القوة مضروبة في المسافة" (انظر: ملاحظة 2 في الفصل 3)، نحصل على[6]

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = fs = \mu mg\cos(\theta)s.$$

وبما أنّ

$$h = s\sin(\theta)$$

ومن ثم

$$v^2 - 2gs\sin(\theta) - 2\mu mgs\cos(\theta)$$

أو

$$v = \sqrt{2gs[\mu\cos(\theta) + \sin(\theta)]}$$

وفي مجال تحقيقات حوادث السيارات غالبا ماتكون θ "صغيرة"، وبذلك، استخدام التقريب $\theta \approx \sin(\theta)$ مع (θ بالراديان Radians)[7] و $\cos(\theta) \approx 1$، نحصل على سرعة v في بداية الانزلاق بهذه الطريقة

$$v = \sqrt{2gs\,[\mu + \theta]}.$$

معادلة يستخدمها ضباط الشرطة بكثرة عند التحقيق في حوادث السيارات. ولاستخدامها من الواضح أننا نحتاج إلى قيمة μ، التي من السهل إيجادها بأداء تجربة انزلاق باستخدام سيارة مشابهة للسيارة المشتركة في الحادث، في موقع الحادث. لذا، لنفرض أن السيارة التجربة تُقاد إلى أعلى الطريق بالسرعة المعلنة وهي 25 ميلاً/الساعة بعدها تقوم بالانزلاق، لتنتج آثار انزلاق بطول 46.5 قدم. ومن معادلتنا لـv، نحصل على

$$\mu + \theta = \frac{v^2}{2gd} = \frac{\left[\left(\frac{25}{60}\right) \times 88\right]^2}{2 \times 32.2 \times 46.5} = 0.45,$$

التي استخدمت فيها التحويل (يستحق الحفظ!) لـ 60 ميل في الساعة = 88 قدم/ ثانية (fps).

لاحظ أنّ هذه النتيجة ليست قيمة μ بحد ذاتها (إلا إذا $\theta = 0$) وإنما القيمة التي تشمل تأثير انحدار الطريق. خاصة، لمسألة المقدمة، التي تكون فيها آثار الانزلاق إلى أعلى كانت بطول 106 قدم، والسرعة عند بداية الانزلاق يجب أن تكون

$$v = \sqrt{2 \times 32.2 \times 106 \times 0.45} = 55.4 \text{ fps} \approx 38 \text{ mph}.$$

من الواضح أنّ السائق كان مسرعا.

والآن ماذا عن الجزء الثاني لمسألة المقدمة: كيف تتغير الحسبة إذا كان كل شيء نفس السابق ما عدا أنّ الآن طول علامة الانزلاق 106 أقدام تحدث على منحدر مائل إلى الأسفل بنسبة 8%؟ وهذا، إذا كانت السرعة التي حسبناها للتو تُسمى v_u (للطريق المائل إلى الأعلى)، ماهي v_d (للطريق المائل إلى الأسفل)؟ لحسابات الطريق صعودا لدينا، كما وجدنا سابق ل $\theta > 0$،

$$v_u^2 = 2gs\,[\mu + \theta].$$

ولحالة الطريق نزولا نستعيض ببساطة $-\theta$ بدلا من θ، من ثم

$$v_d^2 = 2gs\,[\mu - \theta].$$

وهكذا،

$$v_u^2 - v_d^2 = (2gs\,\mu + 2g\theta s) - (2gs\,\mu - 2g\theta s) = 4g\theta s$$

أو كما للمنحدر المائل بنسبة 8%، لدينا $\theta = 0.08$،

$$v_d^2 = v_u^2 - 4g\theta s$$

$=\{(55.4)^2 - 4 \times 32.2 \times 0.08 \times 106\}$ قدم تربيع/ثانية تربيع

$= 1,977$ قدم تربيع/ثانية تربيع

وبذلك

$v_d = 44.5$ قدم لكل ثانية $= 30.3$ ميل لكل ساعة

وهذا يعني أنّ السائق كان فعليا مازال يُسرع في منطقة السرعة المسموح فيها هي 25 ميل/الساعة ولكن الآن، الانتهاك في هذه الحالة أقل منه في حالة الصعود.

ملاحظات

1. قوة حصان واحد يساوي 746 وات. إذا كنت تتساءل عن مصدر هذا الرقم الداعي للفضول، دعني أقول أنه كان حادثا تاريخيا من الأيام الباكرة للمحركات التي تعمل على البخار. التاريخ ممتع، ولكننا نسعى إلى الفيزياء هنا، ولن أقول أكثر.
2. انظر: Geoffrey T. Fox, "On the Physics of Drag Racing," *American Journal of Physics*, March 1973, pp. 311–313. كان فوكس أستاذ في الفيزياء في جامعة سانتا كلارا University of Santa Clara (كاليفورنيا) عندما كتب هذه الورقة، لكنه ترك الوسط الأكاديمي ليبدأ سباقات فوكس الولايات المتحدة Fox Racing USA
3. منحت ورقة فوكس المعامل العدد 270 بدلا من 281، ولكن صرّح بها ببساطة دون تقديم أي حسابات. وأظنّ أنّ 270 خطأ مطبعي.
4. John W. Burgeson, "A Problem in Free Space Dynamics," *American Journal of Physics*, April 1956, p. 288.
5. بما أن قوّة الاحتكاك التراجعية تقل عندما يحدث الانزلاق، فمن الواضح أن المرغوب فعله هو عدم الانزلاق في حال التوقف الطاريء. أي، من الأفضل ألا تقفل الإطارات، وهذه الفكرة وراء نظام أي بي أس ABS (نظام منع انغلاق المكابح)، الموجود في العديد من السيارات. يتلقى عادة مالكي السيارات المزودة بهذا النظام خصما على قسط تأمين السيارة بسبب زيادة السلامة الضمنية.
6. يُصبح الإطار الذي تعرّض للانزلاق ساخنا، بسبب الاحتكاك. لذا، تذهب بعض طاقة الحركة من السيارة المنزلقة إلى الإطارات التي تتعرض للتسخين. للتقريب الأولي سأتجاهل هذا التأثير
7. $\sin(\theta) = 0.08, \theta = 4.6^\circ$ هي زاوية يعتبرها معظم الناس (على ما أعتقد) "صغيرة".

5 لعبة دوامة الخيل وفيزياء المد والجزر

"وبهذا تغلب داود على الفلسطينيين بمقلاع وحجر".
- لقي جالوت نهايته في الكتاب المقدس لأن داود فهم العجلة المركزية (صموئيل 50 :1)

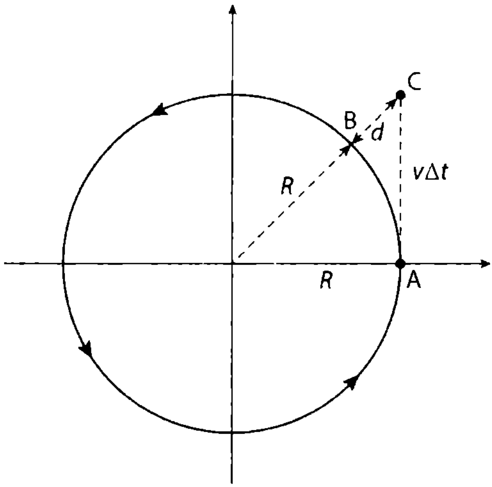
عندما تربط حجرا بنهاية حبل وبعدها، تُمسك بالطرف الآخر، ثم تُأرجح الحجر في دائرة حول رأسك، فإنك تشهد قوة الجذب المركزية *Centripetal Force* أثناء عملها. وأنت تشهد هذه القوة شخصيا عندما تركب لعبة دوامة الخيل Merry-go-round، والأرض بأكملها تشهدها بينما تدور حول الشمس. في المثال الأول، القوة المُلقاة على الحجر هي الشد في الحبل (القوة التي تَشعر بها، تساويها في القيمة ولكن تعاكسها بالاتجاه، هي ما تسمى عموما قوة الطرد المركزية *Centrifugal Force*): "في المثال الثاني قوة الجذب المركزية هي القوة التي يبذلها جسدك على الأرجوحة لتمنعك من الطيران خارج منصة الدوامة، وفي المثال الأخير قوة الجذب المركزية هي نتيجة الجاذبية Gravity.

ومن المفاهيم الخاطئة الشائعة هي أنك إذا أفلت الحجر (أو الدوامة) سيندفع الحجر (أو أنت) مباشرة (قطريا) بعيدا من مركز الدوران. وهذا ليس ما يحدث، الحركة الناتجة ستكون مماسة *Tangent* للحركة الدائرية. فعندما جابه داود جالوت Goliath بمقلاعه، كان من المهم أن تكون فيزيائه صحيحة!

إذا تحركت كتلة m بسرعة v في دائرة بنصف قطر R، إذا هي مجبرة على الانحناء باستمرار بمسار منحني بعيدا عن مسار الخط المستقيم. وتأتي هذه القوة من العجلة للداخل باتجاه مركز الدائرة، عجلة بقيمة $\frac{v^2}{R}$. من قانون نيوتن الثاني Newton's laws تكون القوة باتجاه الداخل F (كلمة مركزية *Centripetal* تعني "الباحثة عن المركز") يكون مقدارها[1]

$$F = m\frac{v^2}{R}.$$

هنا اشتقاق Derivation بسيط للعجلة المركزية للحركة الدائرية.



رسم توضيحي 5.1 القوة المركزية أثناء عملها

في الشكل 5.1 لدينا كتلة m تتحرك بسرعة ثابتة v بطول مسار دائري بقطر R. ولدى سرعة الكتلة *Velocity*، وهي متجه كالقوة، مقداره v، وتُسمى السرعةَ *Speed* (السرعة كمية عددية Scalar). بينما التسارع ثابت، يتغير اتجاه السرعة باستمرار. وهذا التغيير بالاتجاه سببه قوة. لأنّ عند الزمن $t=0$ تكون الكتلة على A كما في الرسم التوضيحي 5.1، الذي، مع عدم فقدان العمومية، فيُعبّر عنه بالمحور الأفقي لنظام إحداثياتنا. من ثم، تكون الكتلة بعدها بزمن قصير Δt على النقطة B. وإذا لم تكن هناك قوة تعمل على الكتلة، مع ذلك، ستكون على C بدلا من ذلك، مسافة رأسية تعمل على $v\Delta t$ للأعلى من A. ولكن الكتلة m ليست على C لأن قوة قد بُذلت عليها، القوة التي سنقوم بحسابها الآن.

تبعد النقطة C الموضحة في الشكل 5.1 مسافة d عن B، لذا لا بد لبعض القوة أن "تَشُدْ" Pulled الكتلة للداخل عبر المسافة d لتبقي الكتلة المتحركة على مسار دائري. إذاً هذه القوة سببّت العجلة الثابتة a، إذاً يجب أن نحصل على

$$d = \tfrac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

يمكنك أن ترى من نظرية فيثاغورس أنّ

$$R^2 + (v\,\Delta t)^2 = (R + d)^2 = R^2 + 2Rd + d^2$$

أو

$$v^2(\Delta t)^2 = (2R + d)\,d = \left[2R + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2\right]\frac{1}{2}a(\Delta t)^2.$$

بإلغاء $(\Delta t)^2$ من الجهتين نحصل على

$$v^2 = \left[2R + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2\right]\frac{1}{2}a = Ra + \frac{1}{4}a(\Delta t)^2.$$

ومن ثم، عندما نجعل $\Delta t \rightarrow 0$،

$$v^2 = Ra.$$

وهذا، العجلة المركزية هي:

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

من $F = ma$ بعدها نحصل على معادلة القوة التي ناقشناها في افتتاح هذا الفصل.

أحد أعظم نجاحات دراسات نيوتن كانت اكتشافه أنّ مجال الجاذبية Gravitational Field خارج جسم كروي متناظر ضخم هو المجال نفسه إذا كان الجسم عبارة عن كتلة نقطية.[2] لذا، عند حساب مدار الأرض حول الشمس يمكننا استبدال كل من الأرض والشمس بكتلتين نقطيتين، لأنّ المدار يقع خارج الشمس (أعتقد أن ذلك واضح!). "المدار" Orbit هو مسار مركز الأرض. أي، إذا كانت كتلتا الشمس والأرض هي M و m، على الترتيب، إذن قوة الجاذبية (قوة الجذب المركزية) على الأرض تُعطى بقانون نيوتن الشهير قانون التربيع العكسي *Inverse-square law*

$$G\frac{Mm}{r^2}$$

حيث r نصف قطر مدار الأرض (مقاسة من مركز الشمس إلى مركز الأرض)، و G هي ثابت الجاذبية العالمي *Universal Gravitational Constant*.[3]

إليك سؤالاً مثيراً باستخدام قانون نيوتن للجاذبية. من تعتقد يبذل قوة جاذبية أكبر على الأرض، القمر أم الشمس؟ الشمس أكبر بكثير من القمر، ولكنها أيضا أبعد بكثير من القمر عن الأرض. فهذان العاملان، الكتلة والمسافة، هما عكس بعضهما، لذا إنّه من الواضح جداً أيُّهما مسيّطر. ويمكننا حساب الجواب كما يلي، باستخدام القيم العددية التالية:

M_S = كتلة الشمس = 2×10^{30} كيلوغرام
M_m = كتلة القمر = 7.35×10^{22} كيلوغرام
R_S = بُعد الأرض عن الشمس = 93×10^6 ميل
R_m = بُعد الأرض عن القمر = 2.39×10^5 ميل

لذا نسبة قوة جذب الشمس إلى الأرض إلى قوة جذب القمر للأرض هي (m هي كتلة الأرض، التي تُلغى، لذا لن نحتاج إلى معرفتها)

$$\frac{G\frac{M_s m}{R_s^2}}{G\frac{M_m m}{R_m^2}} = \frac{M_s}{M_m}\left(\frac{R_m}{R_s}\right)^2 = \frac{2\times10^{30}}{7.35\times10^{22}}\left(\frac{2.39\times10^5}{93\times10^6}\right)^2 = 180.$$

قوة جاذبية الشمس على الأرض هي 180 مرّة أكبر من القمر.

ويمكننا الآن اشتقاق إحدى النتائج الأساسية لفيزياء المدارات Orbital physics، وهي نتيجة توصل إليها الفلكي الألماني يوهانس كيبلر Johannes Kepler (1571-1630) في عام 1619 من الرصد التجريبي الشاق لحركات الكواكب المرئية، قبل عقود من ولادة نيوتن. وباستخدام قانون قوة الجاذبية لنيوتن، يمكننا الحصول على نتيجة كيبلر عند الجلوس براحة مقابل المدفئة من دون النظر إلى الأعلى إلى السماء ولو مرّة واحدة.

لنفرض أنّ الكتلة m تدور حول الكتلة M مرة في زمن T على مسافة ثابته r بسرعة v. قانون القوة لنيوتن، مدمج بالعجلة المركزية، يقول

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r},$$

من ثم

$$GM = v^2 r.$$

بما أنّ

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

بعدها

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

ومن ثم[4]

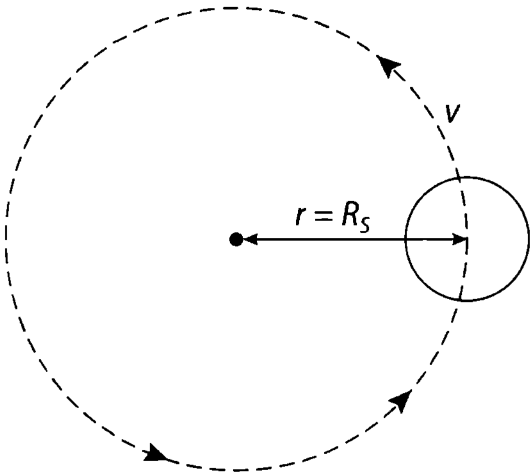
$$GM = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} r = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3,$$

أو

$$M \text{ ثابت للمعطى } = \frac{\mathrm{r}^3}{\mathrm{T}^2} = \frac{\mathrm{GM}}{4\pi^2}$$

هذا قانون كيبلر الثالث لحركة الكواكب Third law of planetary motio ، حيث M هي كتلة الشمس. لاحظ أنّ m، كتلة الجسم في المدار، لا يَظْهر في المعادلة، لذا الثابت هو نفسه لكل الكواكب التي تدور حول الشمس.[5]

والآن أخيراً، نأتي لمسألة المد والجز في المحيطات. للبدء، دع القمر جانبا وركّز مع الأرض وهي تدور حول الشمس، كما هو موضّح في الشكل 5.2.



الرسم التوضيحي 5.2 الأرض تدور حول الشمس

هناك الشمس الضخمة مرسومة ككتلة نقطية والأرض الصغيرة نسبياً كجسم ممتد (الرسم غير دقيق!). تخيل الأرض مغطاة بالماء (مثل ما هي غالباً) يبعد مركز الأرض R_S من مركز الشمس وهي قيمة r التي نستخدمها في قانون قوة الجاذبية لنيوتن. كما كتبنا سابقا عند مناقسة قانون كيبلر الثالث، والسرعة المدارية للأرض مُعطاة كالتالي:

$$v = \frac{2\pi R_s}{T},$$

وبالتأكيد، هذه هي السرعة المدارية ليس فقط لمركز الأرض وإنّما لكل الأرض (هذه حقيقة مُشاهدة، وإلا سنرى الأرض تتمزق!)

والآن، الماء الموجود على جانب الأرض الأقرب إلى الشمس ليس على مسافة R_S من مركز الشمس ولكن على مسافة R_S - R، حيث R هو قطر الأرض. لذا، قوة الجذب على ذلك الجانب من الأرض أكبر من المطلوب للماء ليدور بسرعة v، وهذا الجذب الإضافي يُشكل انتفاخ في الماء باتجاه الشمس. ومعظم الناس يجدون مثل الانتفاخ أمرا حدسيا واضحا. ولكن الذي لا يجدونه واضحا هو أنّ هناك انتفاخ ثاني معاكس تماما للانتفاخ الأول، على الجانب الآخر من الأرض، الجانب الأبعد من الشمس. والتفسير للانتفاخ الثاني، مع ذلك، هو نفسه: العجلة المركزية. أي أنّ الماء على جانب الأرض البعيد عن الشمس ليس على بُعد R_S من مركز الشمس، ولكن، بدلاً من ذلك، هو على مسافة R_S + R. لذا، قوة الجذب على ذلك الجانب من الأرض هي أقل من المطلوب لكي يدور الماء بسرعة v، وهذا الجذب المُخفّض يسمح بتشكّل انتفاخ الماء في الجانب البعيد عن الشمس.

هذان الانتفاخان ثابتان على طول الخط المشترك بين مركزي الشمس والأرض، ولكن بما أنّ الأرض تدور على محور مائل بنحو 23° من العمودي على مستوى المدار، ينتقل الانتفاخان

حول الأرض (بدقّة أكثر، الأرض تدور تحت الانتفاخين مرة كل 24 ساعة)، وعندما نرى أحد الانتفاخين كل 12 ساعة فإنّ هذا هو ما نسمية المد والجزر الشمسي العالي Solar High Tide. وبما أنّ الأرض والقمر يدوران أيضا حول بعضهما (حول مركز كتلة مشترك Center of Mass[6])، هناك المدّ والجزر القمري Lonar Tides أيضا. تذكّر أننا حسبنا في البداية أنّ قوة جذب الشمس للأرض هي 180 مرة أكبر من قوة جذب القمر للأرض. وقد يقودك هذا بسذاجة إلى توقع أنّ المد والجزر القمري العالي لا يُذكر مقارنة بالمد والجزر الشمسي العالي. ولكن ذلك غير صحيح. وفي الحقيقة، هو العكس تماما. المدّ والجزر القمري هو المدّ والجزر الأكبر. لماذا؟

لأنّ الشمس أبعد عن الأرض من القمر. وقد ذكرت أنّ المدّ والجزر جاء نتيجة الاختلافات في قوة الجاذبية على جانبي الأرض الأقرب والأبعد من الشمس مقارنة بقوة الجاذبية في مركز الأرض. وبالنسبة إلى الشمس، هذه الاختلافات صغيرة مقارنة بالاختلافات الناتجة من القمر. ويمكننا حساب الاختلافات في الجاذبية على كتلة m كما يلي. بالنسبة إلى الشمس،

الجاذبية على الجانب القريب منها = $G\frac{M_s m}{(R_s-R)^2}$

والجاذبية على الجانب البعيد عنها $G\frac{M_s m}{(R_s+R)^2}$

وبذلك، تكون الاختلافات على الأرض عبر قطرها نتيجة جاذبية الشمس هي:

$$G\frac{M_s m}{(R_s-R)^2} - G\frac{M_s m}{(R_s+R)^2} = GM_s m\left[\frac{1}{(R_s-R)^2} - \frac{1}{(R_s+R)^2}\right].$$

التي تنخفض (مع تقريب $R_S >> R$)

$$4GM_s m\frac{R}{R_S^3}.$$

لاحِظْ أنّ هذه الاختلافات تتناسب عكسيا مع مكعّب المسافة. وبالمثل، الاختلاف من الجانب القريب إلى الجانب البعيد للأرض عن جاذبية القمر هي:

$$4GM_m m\frac{R}{R_m^3}.$$

لذا،

$$\frac{\text{Moon variation}}{\text{Sun variation}} = \frac{M_m}{M_s}\left(\frac{R_s}{R_m}\right)^3 = \frac{7.35\times 10^{22}}{2\times 10^{30}}\left(\frac{93\times 10^6}{2.39\times 10^5}\right)^3 = 2.16.$$

المدّ والجزر القمري أكثر من ضعف المد والجزر الشمسي، حتى على الرغم من أنّ الشمس أضخم بكثير من القمر. فميزة حجم الشمس تغلبت عليها المسافة الشاسعة بينها وبين الأرض: على طول قطر الأرض، بالكاد تختلف جاذبية الشمس بينما ننتقل من مسافة 93 مليون ميل ناقص 4 آلاف إلى 93 مليون ميل زائد 4 آلاف.

قوى المدّ والجزر بسبب اختلافات الجاذبية عبر الكرة الأرضية لها نتيجة مُذهلة في نظامنا

الشمسي، إضافة إلى حدوث المدّ والجزر في محيطات الأرض. فهذه القوى هي سبب (أو على الأقل يُشتبه بأن يكون السبب) حلقات زحل الجميلة. منذ زمن بعيد، كان من المعتقد، أن قمر زحل اقترب كثيرا من الكوكب الضخم فمزقته حرفيا قوة مدّ وجزر الكوكب عليه، فنتجت الكمية الهائلة من الشظايا مُشكّلة مانراه اليوم من حلقات.[7]

وأخيراً، آخر تعليق تقني على حقيقة أنّ هناك اثنين من الانتفاخات الناتجة من المدّ والجزر القمري: هما نتيجة حركة نظام الأرض -القمر. لوكان الأرض والقمر ثابتين في الفضاء، وكانت حركة الأرض الوحيدة هي دورانها حول محورها، إذاً، سيكون هناك مدّ وجزر عالٍ واحد على الأرض كل 24 ساعة، أسفل القمر مباشرة. إنها الحركة "الدورانية" Orbital motion للأرض حول مركز كتلة نظام الأرض –القمر الذي يُنشئ انتفاخ مد وجزر المحيط من الجانب البعيد الثاني.

اعتقد الكُتّاب الصينيون القدماء أنّ المحيطات هي دماء الأرض، وأنّ المدّ والجزر يعكسان ضربات نبض الأرض وأنها نتيجة تنفس الأرض. وكل ذلك حكايات رومانسية، مستوحاة من الفكرة الأسطورية القديمة عن غايا (Gia): أنّ الأرض هي كائن حي. ولكن هذا كتاب فِيزياء، وليس ديوان شعر، ولذا، أكرر أنّ الجاذبِية هي سبب المدّ والجزر.

ملاحظات

1. للتفرقة بين مقدار *Magnitude* متجه Vector (القوة Force) من المتجه نفسه، يستعمل مؤلفو الكتب الدراسية أحد أشكال التنضيد المختلفة، على سبيل المثال، $\bar{F}$ لمتجة القوة و F للمقدار $F = |\bar{F}|$ أو بالخط الغامق للمتجه (وبذلك $F = |\mathbf{F}|$).
2. هذه إحدى النتيجتين التي نشرها نيوتن في 1687 في كتابه المبادئ *Principia* اللتان يُطلق عليهما مجتمعين بالنظريات الرائعة *Superb Theorems*. (والأخرى هي أنّ قوة الجذب على كتلة نقطية داخل غلاف كروي مجوّف من مادة متوزّعة بانتظام، بغض النظر عن أيِ مكان تكون فيه كتلة النقطة داخل الغلاف، هي صفر). انظر: الاشتقاقات الحديثة المبنيّة على الحسبان للنظريتين (استخدم نيوتن حجج هندسية عميقة) في كتابي لحاف السيدة بيركنس الكهربائي book *Mrs. Perkins's Electric Quilt, Princeton University* Press, 2009, pp. 140–147.
3. نظرية G وارتباطها بتجربة كافندش الشهيرة Cavendish Experiment (تجربة حساسة لدرجة أنها لم تُجرَ قبل 1798، إحدى وسبعين سنة بعد وفاة نيوتن) وذُكرت في كتاب السيدة بيركنس ، صفحات 136-140. وقيمة G هي $6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg.s^2}$. حتى صدور هذا الكتاب (2016) قيمة G معروفة لثلاثة أرقام مهمة، أقل من ما نعرف أغلب الثوابت الفيزيائية الأخرى، انظر: significant digits, far fewer than we know most other physical constants; Clive Speake and Terry Quinn, "The Search for Newton's Constant", Physics Today, July 2014, pp. 27-33, and the end of Chapter 22.
4. على مسافة 93,000,000 ميل من الشمس، ومع زمن دوران 365 يوماً، تكون السرعة المدارية للأرض حول الشمس أكثر بقليل من 18 ميل/ثانية.
5. هذا صحيح فقط إذا $M >> m$، وهي الحالة للنظام الشمسي. يمكنك القراءة عن قوانين كيبلر

الثلاثة (إضافة إلى استنتاج طبيعة اعتماد الثابت في القانون الثالث على m)، في كتاب السيدة بيركنس صفحات 170-185.

6. لأنّ الأرض أكبر بكثير من القمر، كتلتها المركزية داخل الأرض فعليا، أكثر من 1000 ميل تحت سطح الأرض. لتفاصيل أكثر، انظر: كتاب السيدة بيركنس ، صفحات 175-178.

7. قصة خيال علمي مخيفة إلى حد مدهش، *مبنية* على قوة المدّ والجزر التي يبذلها جسم ضخم على كتلة "صغيرة" ماديا (فمعنى صغيرة في القصة هي المسافة بين رأس وقدمي مسافر بشري عبر الفضاء) تقترب كثيرا من نجم فائق الكثافة، هو "النجم النيتروني" Newtron Star الكلاسيكي المُكتشف بواسطة لاري نيفن Larry Niven. والنتيجة هي نسخة الخيال العلمي من طاولة تعذيب القرون الوسطى.

6 طاقة من المياه المتحـركة

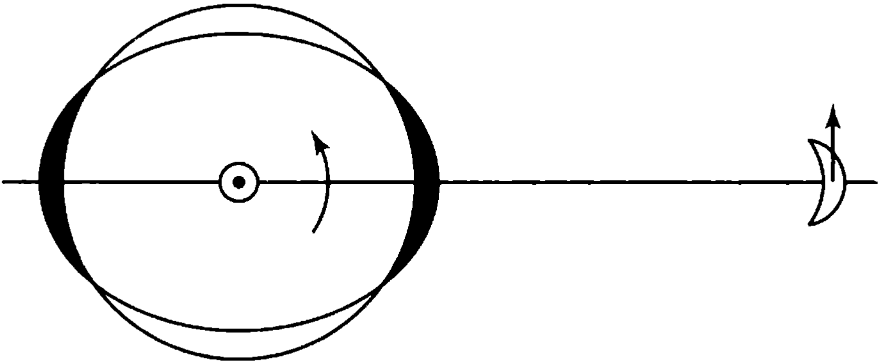
"باستمرار تتبدد الطاقة من المدّ والجزر بمعدل قدره بليون حصانٍ"!
- إدوارد بـ. كلانسيٍ، المدّ والجزر: نبض الأرض (*1968*)
Edward P. Clancy, The Tides: Pulse of the Earth (1968)

لقد رأينا في الفصل الثالث أنّ هناك طاقة كبيرة من حركة الهواء. ماذا عن حركة الماء؟ على سبيل المثال، كم من الطاقة موجودة في مدّ وجزر محيطات الكوكب بأكمله؟ الجواب هو الكثير (تقدير كلانسي حقيقةً هو الحد الأدنى)، ولحساب تلك الطاقة تحتاج فقط إلى تطبيق فيزياء بسيطة. نبدأ بمصدر المدّ والجزر- القمر (والشمس بدرجة أقل) – كما ناقشنا في الفصل السابق. وهناك شاهدنا كيف أنشأت الجاذبية والعجلة المركزية انتفاخين من المدّ والجزر، واحد تحت القمر مباشرة، والآخر في الجهة البعيدة من الأرض عكس اتجاه الأول. ويبدو أنّ الانتفاخين ينتقلان حول الأرض بينما تدور حول محورها القطبي، ولذا نرى "المدّ والجزر" كل 12 ساعة.

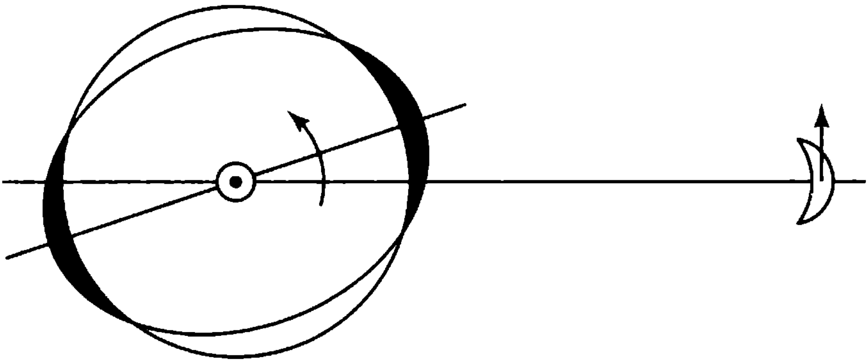
ولكن هناك حبكة جديدة في الأمور التي لم نناقشها في الفصل الخامس.

بسبب قوى الاحتكاك، الانتفاخين ليسا على خط واحد مباشرة مع مركزي الأرض والقمر، كما في الشكل 6.1 ولكن، بدلاً من ذلك، هما فعليا مُزاحان قليلا، كما هو موضح في الشكل 6.2. والسبب وراء ذلك يعود إلى أنه لا يوجد مرونة Elasticity كاملة أو سيولة Fluidity في مكونات الأرض الصلبة والسائلة، على الترتيب. وبسبب قوى الاحتكاك هذه لايستجيب سطح الأرض لحظيا للقوى، ولذا يدفع دوران الأرض انتفاخات المدّ والجزر إلى الحدوث بعد فترة من الزمن.

وشد الجاذبية القمرية على الانتفاخين ينتج صافي عزم دوراني[1] مضاد Net Counter-Rotational Torque الذي يميل إلى تخفيف سرعة دوران الأرض. ويميل جذب القمر على الانتفاخين إلى زيادة السرعة، ولكن الجذب على الجزء القريب من الانتفاخ أكبر، وهذا الجذب يميل إلى تخفيف السرعة الدورانية.



رسم توضيحي 6.1 انتفاخي المدّ والجزر من دون احتكاك



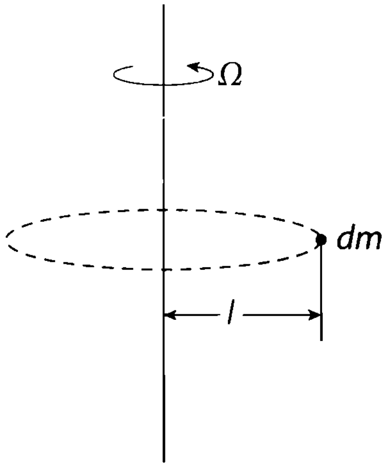
رسم توضيحي 6.2 انتفاخي المدّ والجزر مع الاحتكاك

النتيجة الصافية هي أنّ دوران الأرض يتباطأ (وهو، أنّ طول اليوم يزداد باستمرار). ولكن هذا يحدث ببطء شديد. وأظهرت الساعات الذرية Atomic Clocks أن طول اليوم يزداد بمعدّل نحو 2 مللي ثانية لكل قَرن! أي، أنّ طول اليوم قبل 100 سنة مضت كان 0.002 ثانية أقصر مما كان بالأمس، وأنّ طول اليوم قبل 200 سنة مضت كان 0.004 ثانية فقط أقصر مما كان بالأمس، وهكذا.

وللتوصل إلى طول الأيام القديمة بطريقة مختلفة تماما تأتي من علم الأحياء البحرية Marine Biology. فحص أنماط النمو في التركيب الهيكلي لأحافير الشعاب المرجانية من العصر الديفوني الأوسط Middle Devonian period

(قبل 375 مليون سنة مضت)، وتُشير أنماط حساسة للتغيرات اليومية والموسمية في البيئة إلى أنّ هناك نحو400 يوم في السنة سابقا. بما أنّ طول السنة ثابت نتيجة ميكانيكا دوران الأرض فقط، إذا طول اليوم في العصر الديفوني الأوسط عليه أن يكون(24) $\frac{365}{400}$ ساعة = 21.9

ساعة. إذن، 3،750 ألف قرن مضى كان اليوم 2.1 ساعة أقصر. أي، لكل قرن، يتغير $\frac{2.1\times3,600}{3,750,000}$ ثانية = 0.002 ثانية.



رسم توضيحي 6.3 تراكم دوران الكتلة من عناصر كتلة تفاضلية *dm*

قد تتساءل كيف لزيادة ثابتة في طول اليوم تصل إلى 2×10^{-3} ثانية فقط بعد قرن، أن تكون مهمة، ولكن يجب أن تفهم أنّ التأثير تراكمي. فعلى سبيل المثال، إذا افترضنا أنّ معدل الزيادة كان ساري المفعول من 2000 سنة (20 قرن)، إذا اليوم الذي أُغتيل فيه يوليوس قيصر Julius Caesar (44 قبل الميلاد) كان أقصر مدة بالمقارنة بالأمس، $2 \times 10^{-3} \times 20 = 40$ بمللي ثانية. وبما أنّ هذه النتيجة تعكس الانخفاض المنتظم في طول اليوم عندما نعود بالزمن إلى الوراء، إذا متوسط التغيير في مدة كل يوم من الأيام خلال الألفين سنة الماضية كان 20×10^{-3} ثانية. لذا، التحول في التراكم الكلي *Total Accumulated* في توقيت حدث قبل 2000 سنة سيكون

$$20 \times 10^{-3}\,\frac{\text{seconds}}{\text{day}} \times 2{,}000\,\text{years} \times 365\,\frac{\text{days}}{\text{year}} = 14{,}600\,\text{seconds},$$

وهو، 4 ساعات![2]

الأرض كبيرة بما فيه الكفاية، بحيث إنّ أنّ ترحيل الزمن بأربع ساعات عبر 2000 سنة يتطلب كميّة هائلة من الطاقة، وهذه هي الطاقة التي سنحسبها في هذا الفصل. ولإجراء الحساب، علينا أولاً أن نستكشف كيف نحسب طاقة الحركة الدورانية *Rotational* Kinetic Energy للأرض، لذا سنبدأ بذلك.[3]

تخيل جسماً ثلاثي الأبعاد ممتد ذو كتلة *M* وحجم *V* يدور بمعدّل زاوي Angular rate ثابت حول محور دوران *Axis of Rotation*، كما هو مبين في الشكل 6.3. وأنّ معدّل الدوران الزاوي هو *Ω* راديان/ثانية، مما يعني أنه إذا كان *T* هو الوقت اللازم لإتمام دورة كاملة (بالثواني)، إذاً

$$\Omega T = 2\pi.$$

وكما هو موضّح في الشكل 6.3، الجسم الضخم *M* مبني من عناصر كتلة تفاضلية *dm*،

ويبعد كل منها مسافة متغيرة l من محور الدوران. وبما أنّ كل عنصر يتحرك بسبب الدوران، فإنّ لدى كل عنصر طاقة حركية تفاضلية dE، معطاة كالتالي:

$$dE = \frac{1}{2}(dm)\,v^2,$$

حيث تكون سرعة كل عنصر

$v = \Omega l$.

من ثم،

$$dE = \tfrac{1}{2}\,\Omega^2 l^2 dm,$$

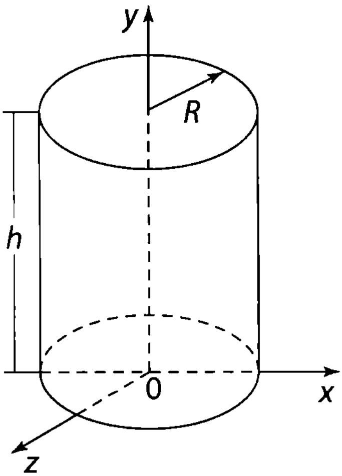
وإذا كاملنا dE عِبْر كامل المدى المكاني للجسم، سنحصل على الطاقة الكليّة للدوران حول محور

$$E = \iiint_V dE = \frac{1}{2}\Omega^2 \iiint_V l^2 dm = \frac{1}{2}\Omega^2 I.$$

يمكننا أخذ Ω^2 خارج التكامل الثلاثي لأنّ Ω هي عدد ثابت، ولكن يجب أن نترك l^2 في الداخل لأنّ بُعد كل عنصر كتلة dm من محور الدوران متغير (بصورة عامة). التكامل الثلاثي في أقصى اليمين هي I، عزم القصور الذاتي *Moment of Inertia* للجسم حول محور الدوران. ملاحظة: للأمثلة في هذا الكتاب، سيكون للأجسام الضخمة التي سنعتبرها العديد من التناظر، ولن نقوم بإجراء أي تكامل ثلاثي.

ولمثال بسيط لمثل هذا الحساب، لنأخذ مثلاً أسطوانة دائرية عمودية بنصف قطر R، وارتفاع h، وكثافة ثابتة للكتلة ρ، على أن يكون محورها الرأسي الطويل هو المحور الصادي y-axis، مع اعتباره محور الدوران، كما هو موضّح بالشكل 6.4. تخيل أنّ الأسطوانة مصنوعة من طبقات من أغلفة أسطوانية، نصف قطرها x، حيث $0 \le x \le R$، مع جدار سمكه dx. حيث، أنّ الأسطوانة مصنوعة من أغلفة مجوّفة مع نصف قطر داخلي x ونصف قطر خارجي من $x+dx$. وعنصر الكتلة التفاضلية dm للأسطوانة الصلبة هي كتلة الغلاف، والمعطاة بـ $dm = \rho 2\pi x h dx$، ولكل غلاف، يكون عزم التفاضل حول المحور الصادي y-axis هو

$$dI_{\text{shell}} = x^2(\rho 2\pi x h dx) = \rho 2\pi h x^3\,dx,$$



رسم توضيحي 6.4 أسطوانة مصمتة، تدور حول المحور الصادي

فيجب أن نكتب الطرف الأيسر كعزم التفاضل بسبب وجود dx على الجانب الأيمن من المعادلة.

ولحساب عزم القصور الذاتي لأسطوانة مصمتة، نعتبر الأسطوانة الصلبة مكوّنة من العديد من شرائح لامتناهية من الأغلفة الأسطوانية المجوّفة من أنصاف أقطار متزايدة. ويعني هذا رياضياتيا أنّنا نُكامل dI_{shell} عِبْر كل x من 0 إلى R. من ثم،

$$I_{\text{solid}} = \int_0^R dI_{\text{shell}} = \int_0^R \rho 2\pi h x^3\, dx = \rho 2\pi h \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^R = \frac{\rho\pi h}{2} R^4.$$

والكتلة الكليّة للأسطوانة الصلبة هي

$$M_{\text{solid}} = \pi R^2 ph،$$

من ثم

$$I_{\text{solid}} = \tfrac{1}{2} M_{\text{solid}} R^2$$

ولغلاف أسطواني رفيع بنصف قطر R ويدور حول محوره الطويل، توجد كل الكتلة على البعد نفسه من المحور، وبذلك، من الفحص، لدينا

$$I_{\text{shell}} = M_{\text{shell}} R^2$$

والآن، لحساب عزم القصور الذاتي للأرض، نحتاج إلى تقييم التكامل الثلاثي $\iiint v l^2 dm$ للحالة التي يكون فيها محور الدوران هو قطر الكرة الصلبة. ويمكنك العثور على تقييم بقوة خارقة لهذا التكامل للكرة في معظم كتب الحسبان للسنة الجامعية الأولى، ولكن دعني أُريك

طريقة ذكية لأداء ذلك. سنؤديها في خطوتين، أولاً بإيجاد التكامل الثلاثي لغلاف كروي، أي، كرة مجوّفة بغلاف رفيع جدا (فكّر في بالون). بعدها، كما فعلنا لأسطوانة صلبة، سنستخدم أفضل نتيجة الغلاف الكروي لتحويل الغلاف إلى كرة صلبة.

الخطوة 1: سنبدأ بغلاف رقيق جدا f نصف قطر a، و بسماكة da، وبكثافة كتلة ثابتة ρ. وكل عناصر dm هي السطح، ومن ثم نكتب

$$dm = p\ dS\ da،$$

حيث dS هي قطعة من مساحة تفاضلية على السطح. وهذا يعني أننا إذا كاملنا dS عبر سطح الغلاف بأكمله، سنحصل على مساحة السطح الكلية للغلاف الكروي:

$$\iint_S dS = S = 4\pi a^2.$$

والآن تخيّل أنّ محور الدوران هو المحور السيني x-axis، مما يعني أنّ بُعد كل عنصر dm من محور الدوران يعتمد على إحداثيات مستويا الصاد y والعين z فقط، ولأنّ لدينا على السطح $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$، وبذلك يمكننا أن نحدد x بمجرّد أن تكون y و z معطاة. وبهذا،

$$l^2 = y^2 + z^2.$$

وبما أنّ كل كتلة الغلاف موجودة على السطح وأنّه لا يوجد منها في الداخل، ينخفض التكامل الثلاثي إلى تكامل ثنائي عبر السطح، ونحصل على

$$d\,I_x = \iint_S \left(y^2 + z^2\right) \rho\, dS\, da = \rho\, da \iint_S \left(y^2 + z^2\right) dS.$$

وبالطريقة نفسها، إذا كان محور الدوران هو المحور الصادي y-axis، سنحصل على

$$l^2 = x^2 + z^2.$$

وإذا كان محور الدوران هو المحور ع z-axis سنحصل على

$$l^2 = x^2 + y^2.$$

من ثم،

$$d\,I_y = \rho\, da \iint_S \left(x^2 + z^2\right) dS,$$

و

$$dI_z = \rho\, da \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS.$$

وهنا الملاحظة الذكية التي وعدتكم فيها: من خلال تناظر الكرة،

$d\,I_x = d\,I_y = d\,I_z = d\,I_{shell}$.

إنّه واضح جدا، بمجرّد الإشارة إليه، وهو كل مانحتاج إليه لإنهاء حساباتنا. من تعبيراتنا السابقة، لدينا

$$dI_x + dI_y + dI_z = 3dI_{\text{shell}} = \rho\, da \iint_S \left(y^2 + z^2\right) dS + \rho\, da \iint_S \left(x^2 + z^2\right) dS$$
$$+\rho\, da \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS = 2\rho\, da \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dS.$$

والآن كما ذكرنا سابقا، على سطح الغلاف الكروي (حيث توجد كامل كتلة الغلاف) نحصل على

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$،

ومن ثم

$$3dI_{\text{shell}} = 2\rho\, da \iint_S a^2 dS = 2\rho a^2 da \iint_S dS = 2\rho a^2 da\,\left(4\pi a^2\right) = 8\pi\rho a^4 da.$$

وهكذا، تفاضل عزم القصور الذاتي لغلاف كروي بنصف قطر a وسمك غلاف da (حول محور دوران أيٍ قطر) هو

$$dI_{\text{shell}} = \frac{8}{3}\pi\rho a^4 da.$$

الخطوة 2: لإيجاد عزم القصور الذاتي لكرة صلبة ذات نصف قطر R، نتخيله كبصلة، أي مُكوّن من عدد متزايد لامتناهٍ من شرائح أغلفة كروية لنصف قطر. رياضياتيا، هذا يعني أننا نكامل نتيجة غلافنا عبر $0 \le a \le R$. وبذلك، لكرة صلبة مع كثافة كتلة ثابتة ρ،

$$I_{\text{solid}} = \int_0^R dI_{\text{shell}} = \frac{8}{3}\pi\rho \int_0^R a^4 da = \frac{8}{3}\pi\rho \left(\frac{a^5}{5}\right)\Big|_0^R = \frac{8\pi R^5}{15}\rho.$$

كتلة الكرة الصلبة هي:

$$M_{\text{solid}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

ولذا، لكرة ذات كثافة ثابتة،

$$I_{\text{solid}} = \frac{2}{5} M_{\text{solid}} R^2 = 0.4 M_{\text{solid}} R^2.$$

الأرض، على الرغم من ذلك ليست كرة ذات كثافة ثابتة، فمناطقها المركزية أكثر كثافة من المناطق الأقرب من السطح.[4] ونتيجة لذلك، عزم القصور الذاتي للأرض يُعطى بمعامل أصغر من 0.4: تحديدا،

$$I_{\text{Earth}} = 0.3444 M_{\text{solid}} R^2_{\text{Earth}}.$$

والآن، نحن جاهزان لحساب قوة المدّ والجزر للمحيط (التي من الآن وصاعدا سألغي استعمال رمز "Earth"). الطاقة الحركية الدورانية للأرض هي:

$$E = \frac{1}{2}\Omega^2 I.$$

حيث

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

حيث T هي زمن دوران الأرض (طول اليوم)، وبذلك

$$E = \frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{T^2}(0.3444)MR^2 = 0.6888M\frac{\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{C}{T^2}.$$

لقد أدخلت الثابت $C = 0.6888M\pi^2 R^2$، مع الوحدات كيلوغرام. متر تربيع، للمساعدة في الحفاظ على شفافية الرياضيات). لاحظ أنّ كنتيجة، لدى E وحدات من كيلوغرام.متر تربيع/ثانية تربيع، ويجب أن تتأكد أنّ هذه حقاً وحدات الطاقة جميعها متوافقة. وتذكّر أنّ الطاقة هي القوة مضروبة في المسافة (انظر: ملاحظة 2 في الفصل 3)، وأنّ القوة هي الكتلة مضروبة في العجلة، وبهذا الطاقة لها وحدات من الكتلة مضروبة في العجلة مضروبة في المسافة، أو

$$\text{kilograms} \times \frac{\text{meters}}{\text{seconds squared}} \times \text{meters} = \frac{\text{kilograms} \cdot \text{meters-squared}}{\text{seconds squared}}.$$

كيلوغرام.x متر/ثانية تربيع x متر = كيلوغرام.متر تربيع/ثانية تربيع

كما وجدنا للتو. وحدات الطاقة تسمى جول (انظر: ملاحظة 4 من الفصل 3)، وبذلك

$$1 \text{ joule} = 1 \frac{\text{kilogram} \cdot \text{meters-squared}}{\text{seconds squared}}.$$

كيلوغرام (متر تربيع/ ثانية تربيع) 1 = 1 جول

والآن، إذا $E+\Delta E$ هي طاقة الحركية الدورانية للأرض، عندما يزيد زمن دوران واحد للأرض من T إلى $T+\Delta T$، بعدها

$$E + \Delta E = \frac{C}{(T+\Delta T)^2},$$

وبذلك

$$\Delta E = \frac{C}{(T+\Delta T)^2} - E = \frac{C}{(T+\Delta T)^2} - \frac{C}{T^2} = C\left[\frac{1}{(T+\Delta T)^2} - \frac{1}{T^2}\right]$$

$$= C\left[\frac{T^2-(T+\Delta T)^2}{T^2(T+\Delta T)^2}\right] = C\frac{T^2-T^2-2T\Delta T-(\Delta T)^2}{T^2\left[T^2+2T\Delta T+(\Delta T)^2\right]},$$

أو، بافتراض $T \gg \Delta T$،

$$\Delta E \approx -C\frac{2T\Delta T}{T^4} = -2C\frac{\Delta T}{T^3}.$$

بوضع T = 86,400 ثانية و $\Delta T = 2\text{x}10^{-3}$ ثانية (بذلك يؤكد على افتراضنا الأولي بأنّ $T \gg \Delta T$)، سيكون لدينا

$$\Delta E \approx -2\,(0.6888)\,M\pi^2 R^2 \frac{2\times 10^{-3}}{(8.64\times 10^4)^3}.$$

باستعمال $M=5.98\text{x}10^{24}$ كيلوغرام ككتلة للأرض، و $R = 6.38\text{x}10^6$ متر لقطر الأرض، سنحصل على التغيير في طاقة الحركة الدورانية للأرض خلال فترة 100 سنة (100 سنة لأننا أخذنا ΔT = 2 مللي ثانية) كالتالي:

$$\Delta E \approx -2\,(0.6888)\,(5.98 \times \text{kilograms})\,\pi^2 \times (6.38 \times 10^6 \text{ meters})^2 \,\frac{2 \times 10^{-3}\text{ seconds}}{(8.64 \times 10^4 \text{ seconds})^3} = 10.26 \times 10^{21}\text{ joules.}$$

وبقسمة هذه الطاقة على عدد الثواني في 100 سنة ($3.15\text{x}10^9$)، نحصل على قدرة تساوي 3.26 غيغا وات. وبما أنّ حصان واحد = 746وات، فإنّ قوة المد والجزر للمحيط تساوي $\frac{3.260\times10^9}{746}$ حصان = 4.37 بليون حصان.

وهذا الرقم كبير جدا، وليس من الغريب أنّه قبل زمننا الحديث، فكّر الناس باستعمال بعض من هذه الطاقة. وإحدى الأفكار المثيرة التي تبدو جيدة من النظرة الأولى (ولكنها ليست كذلك فعلا) كانت كما يلي:

> لقد رأيت قبل بضع سنوات اقتراحا بأن صعود وهبوط السفن القديمة على المد سيحمل قوة قابلة للاستعمال. وإذا ما تخيلنا الوزن الهائل لسفينة كبيرة، فقد نكون واهمين للحظة في التوصل إلى الاقتناع بهذا المشروع، ولكن الحساب العددي سيظهر قريبا جدواه. ويستغرق المد نحو ست ساعات للارتفاع من المياه المنخفضة إلى المياه المرتفعة، ينخفض وللفترة نفسها مرة أخرى. دعونا نفترض أنّ المياه ترتفع عشر أقدام، وأنّ هيكلا من 10 آلاف طن مزاح يطفو على ذلك؛ إذا فمن السهل أن تُظهر أنه يمكن إنتاج عشرين حصان فقط... ويسرني أن أقول إنّ صاحب هذا المخطط قد تخلى عنه عندما أشير له إلى عدم أهميته النسبية.[6]

و"قدرة عشرين حصانا فقط" هي في الواقع مبالغة في التقدير. وذلك لأنّ ارتفاع (أو انخفاض) 10 آلاف طن (20،000،000 رطل) لمسافة 10 أقدام ينطوي على 200،000،000 قدم-رطل من الطاقة. بما أنّ هذه الطاقة تكونت في 6 ساعات (21،600 ثانية)، فالقدرة هي:

$$\frac{200.000.000\text{ foot-pounds}}{21.600\text{ seconds}} = 9.259\frac{\text{foot-pounds}}{\text{second}}.$$

9.259 قدم-رطل/ثانية = 200،000،000 قدم-رطل/21،600 ثانية

بما أنّ 1 حصان = 550 قدم رطل/ثانية، لدينا قدرة مستوى

$\frac{9.259}{550}$ حصان = 16.8 حصان

وهي قيمة تجعل وجهة نظر داروين Darwin أقوى.

سأتوقف هنا في الوقت الحالي، وأعطيك فرصة للتأمل في جميع مناقشاتنا عن الفيزياء

الدورانية. وسنعود إلى هذه الأفكار في الفصل 10، وهناك سنتوسع قليلا للإجابة عن بعض الأسئلة الفيزيائية الإضافية المسلية التي تُركت سابقا في الكتاب (لماذا يتراجع القمر عن الأرض، وكيف تنثني ماسورة أثناء وقوعها، وما أسرع سرعة لتدحرج الأسطوانة إلى أسفل سطح مُنحدِر).

ملاحظات

1. عزم الدوران Torque على الأرض الناتج من جاذبية القمر المبذولة على انتفاخ المد والجزر هي نتيجة قوة بطول ذراع رافعة. (فكّر بالعزم الذي تبذله على البرغي باستعمال المفك عندما تكون تحت مغسلة المطبخ!
وحدات العزم هي قدم-رطل في النظام الإنجليزي، ونيوتن- متر في النظام المتري. بينما وحدات العزم والطاقة هي نفسها، هما مفهومان مختلفان جدا) القوة Force في نظام عزم الأرض –القمر هي مركب قوة الجذب على الانتفاخ العمودية على الخط الذي يربط بين مركز الأرض بالانتفاخ، وذراع رافعة العزم هي ذلك الخط (وطوله بالتأكيد هو نصف قطر الأرض).
2. حاول الباحثون الأوائل (هذا، ساعة قبل الذرية) استخدام هذه الفكرة عكسيا، لتحديد معدل التباطؤ، بمقارنة توقيت الكسوفات القديمة المُبلّغ عنها مع التوقيت الذي تتنبّأ به نظرية الجاذبية لنيوتن تحت فرضية ثبات طول اليوم. ولم تنجح تلك المحاولات- انظر: Walter H. Munk and Gordon J. F. MacDonald, *The Rotation of the Earth*, Cambridge University Press, 1960, pp. 186–191.
3. للأرض طاقة حركية متعدية *Translational* لأنها تدور حول الشمس، ولكن حتى ولو انعدمت الحركة المدارية، ستكون لدى الكوكب طاقة حركية دورانية، لأنها تدور حول محورها القطبي. وتُجمع طاقتي الحركة لإعطاء الطاقة الحركية الكليّة للأرض.
4. لتفاصيل أكثر حول كثافة المناطق الداخلية للأرض، انظر: كتاب السيدة بيركنس *Mrs. Perkins's*، صفحات 191-200. في مركزها، تكون كثافة الأرض نحو13 مرة من كثافة الماء، بينما بالقرب من السطح هي نحو 3 أضعاف كثافة الماء.
5. أصغر لأن جزءاً أكبر نسبيا من كتلة الأرض موجودة أقرب لمحور دوران الأرض الذي يكون في الكرة ذات الكثافة الثابتة.
6. من كتاب السير جورج داروين Sir George Darwin، المدّ والجزر *The Tides* (صفحات 73-74)، الذي نُشر أول مرة في 1898 وأعاد طباعته دبليو. هـ. فريمان W. H. Freeman في 1962. أظهر داروين حس فكاهة جامد عندما، في جملته الثانية، كتب: "إنها الحالة الوحيدة التي سمعت فيها أنّ مخترعا رُدع بسبب عدم قابلية عمليته لتطبيق الخطوات".
كان داروين في الواقع متحمسا لاستخراج الطاقة من المدّ والجزر، مفضلا الأنهار كمصادر طاقة معتمدة على المياه.

7 المُتّجهات
وأيام الشَعر المنكوش

"إنّه من المستحيل السفر بسرعة الضوء، وبالتأكيد هذا غير مرغوب فيه، لأن قبعة الشخص تستمر بالطيران من على رأسه".

وودي آلن *Woody Allen*

في مجمع التسوق الذي نرتاده أنا وزوجتي، لاحظت أنّه في كثير من الأحيان تهب رياح ثابتة وقاسية على باحة مواقف السيارات الواسعة الإسفلتية والمسطحة التي نعبرها للوصول إلى مدخل المجمع. وهناك عدد من المداخل المتاحة، ولذلك، صرت اختار المدخل الذي يسمح للرياح في ذلك اليوم بأن تهب أقرب ما يمكن بزاوية متعامدة (من اليسار إلى اليمين) على مساري. ذلك لأن الرياح حينها مسطحة على شَعري (بالأحرى ما تبقى منه) بدلا من من جميع الأنحاء. وهذه الرغبة في الحفاظ على المظهر الأنيق في بهو الطعام (فأكتب هذا) هي الحافز وراء المسألة الصغيرة والجميلة التالية في فيزياء المتجهات.[1]

فبالنظر إلى أنني في البداية أمشي مع اتجاه الريح، فمن أي زاوية يجب أن أتحوّل بحيث تهب الرياح (بالنسبة إلي) في زاوية متعامدة على مساري؟ والمثير للدهشة (ربما) للكثيرين، الجواب *ليس* $90°$.

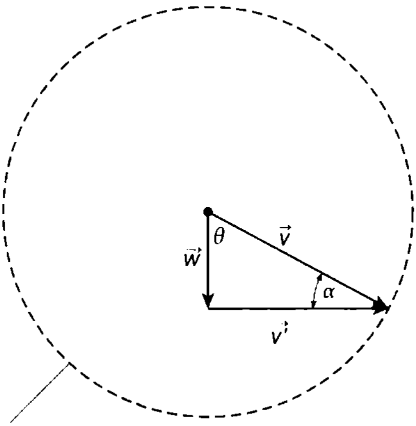
دعونا نكتب $\vec{v}$ كمتجه السرعة الخاص بي بالنسبة إلى موقف السيارات (التي أدعوها السرعة الأرضية) و $\vec{w}$ متجه السرعة للرياح (أيضا بالنسبة إلى الأرض). ثم، متجه السرعة الخاص بي بالنسبة إلى الرياح هو $\vec{v'}$، حيث

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{w}$$

ينبغي لذلك فورا أن يكون منطقيا فيزيائيا في الحالتين الخاصتين:

(1) أنا أسير مع اتجاه الريح وبذلك $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متوازيين (من ثم $v' = v - w$[2])، و(2) أنا أسير بعكس اتجاه الريح وبذلك $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير متوازيين (من ثم $v' = v + w$). ويسمح استخدام المتجهات بالتعبير بطريقة سهلة عن جميع الاحتمالات الأخرى للكيفية التي أسير بها بالنسبة إلى الريح في تعبير واحد. وبإعادة صياغة معادلة المتجهات، نحصل على

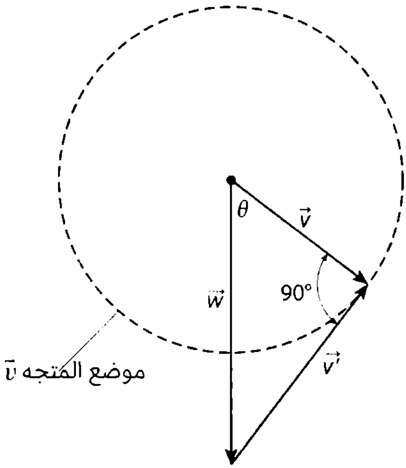
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{w}.$$



موضع جميع احتمالات $\vec{v}$
ذات المقدار الثابت

رسم توضيحي 7.1 حالة $w< v$

الآن، إذا كانت $\vec{v}'$ هي سرعتي بالنسبة إلى الريح، إذا $-\vec{v}'$ هي سرعة الريح بالنسبة إليّ، وهي التي يستجيب لها شعري بينما أمشي عبر باحة مواقف السيارات. وفي شكل 7.1 رسمت المتجه $\vec{w}$ مشيرا إلى أسفل مباشرة، وهي ما يمكننا عمله دائما لأن $\vec{w}$ متجه معطى وثابت، وسنحدد اتجاه الريح ليكون باتجاه الأسفل (ارسم $\vec{w}$ بأي اتجاه تريد وبعدها أدر الورقة حتى يُشير $\vec{w}$ إلى الأسفل!). والمتجه $\vec{v}'$ هو المتجه الذي يجب إضافته إلى $\vec{w}$ ليعطي $\vec{v}$. وتذكّر أنّ $\vec{w}$ هو متجه مُعطى، بينما $\vec{v}$ هو متجه من اختيارنا. وحالما نختار $\vec{v}$ للمشي إلى المجمع، هو والمتجه المُعطى $\vec{w}$ يُحدّدان $\vec{v}'$. والآن نريد اختيار $\vec{v}$ حتى تكون $\vec{v}'$ (فعليا $\vec{v}'$) متعامدة على $\vec{v}$. (حتى تكون α=90°). في الشكل 7.1 افترضت أنّ $w < v$ (أنّ الريح تهب أبطأ من السرعة التي أمشي فيها)، وترى أنّ بينما نجعل المتجه $\vec{v}$ يدور حول دائرة كاملة (مع الحفاظ على ثبات مقداره)، بحيث لا يوجد خيار للمتجه $\vec{v}$ (لا يوجد زاوية θ التفاف) بأن يُعطي متجه $\vec{v}'$ عموديا! ولا أعتقد أنّ ذلك كان واضحا في السابق.



رسم توضيحي 7.2 حالة w>v

الحالـة مختلفـة في الشـكل 7.2، فالفرضيـة الآن هـي $w > v$ (تهـب الريـح أسـرع ممـا أمشـي). والآن، من الممكن تعيين θ بحيث 90° = α. بما أنّ α تُعطينا مثلث قائم الزاوية، نحصل فورا على

$$\frac{v}{w} = \cos(\theta).$$

وبذلـك تكـون زاويـة الالتفـاف الناتجـة مـن المشـي مـع الريـح إلى المشـي لكـي تهـب الريـح بزوايـا قائمـة عـلى خـط اتجـاه سـيري هـي:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{v}{w}\right).$$

على سـبيل المثال، إذا مشـيت بسـرعة 2 ميل/السـاعة في ريح بسـرعة 5 ميل في السـاعة، إذاً يجب أن يكـون خط سـيري بزاوية

$$\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 66.4$$

في اتجاه الريح.

هـذه المسـألة هـي وصـف جـاد للكيفيـة التـي تـؤدي بهـا المتجهـات دوراً مهمـا في الفيزيـاء الرياضياتيـة، ولكـن لاختتـام هـذا الفصـل بملاحظـة أخـف، إليـك "نكتـة متجهيـة" للترفيه. ما الذي ستحصل عليه إذا زاوجت بين بعوضة ومتسلق جبال؟ سيرد عالم الأحياء بالتأكيـد: " لا شـيء، لأنّـه مـن المسـتحيل فعـل ذلـك"، وبغرابـة كافيـة، لـن يوافـق عالـم رياضيـات بحتـة فقـط وإنما سـيدعي أنـه يمكنه إثبات الاسـتحالة. إليك كيف.

في رياضيات المتجهات توجد طريقتان مختلفتان لضرب متجهين في بعضهما البعض: الضرب القياسي *Dot Product* (الذي ينتج منه عدد)، والضرب الاتجاهي *Cross Product* (الذي ينتج منه متجه آخر). والنوعان الاثنان من الضرب يظهران في الفيزياء، ولكن كل منهما يبدأ بمتجهين. لكن لاحظ بينما أنّ البعوضة متجه أمراض، فإنّ متسلق الجبال هو عدد (تذمر). وببساطة لا تستطيع ضرب المتجه بعدد. (هذه تورية فضيعة تستحق 11 على مقياس من 10 في الشناعة).

ملاحظات

1. يمكن العثور على تفسير أقل تركيزا على الذات في ورقة R. L. Armstrong, "Relative Velocities and the Runner," *American Journal of Physics*, September 1978, pp. 950–951.
2. المسافرون مع اتجاه الريح في سلة منطاد الهواء الساخن، بسرعة الريح، لديهم $v = w$ وبذلك $v' = 0$. أي، لا يشعر الركاب في السلة بالريح على الإطلاق (يتحركون في ريح قوية بالنسبة إلى مشاهد على الأرض).

8 مشكلة تُضيء ما حولها

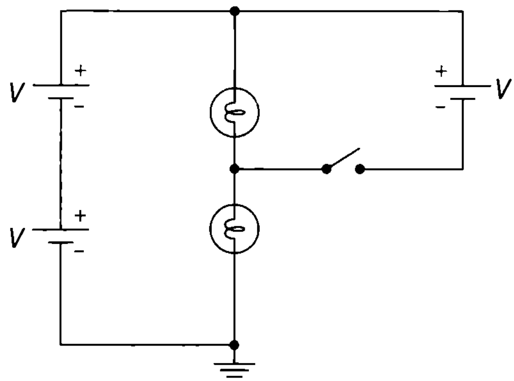
"أراهن على أنّ آينشتاين قد حوّل نفسه إلى جميع الألوان قبل أن يخترع المصباح".
هومر سيمبسون *Homer Simpson*، يُثبت أنّه أبله مرة أخرى.

هنا سترى كيف أنّ بساطة الجبر، جنبا إلى جنب مع فيزياء دوائر المقاومة الكهربائية Electric Resistor Circuits (قانون أوم Ohm's law وقوانين كيرشوف[1] Kirchhoff's laws)، تساعدنا على الإجابة عن أسئلة مثل ما يلي. لدينا في الشكل 8.1 و 8.2 دائرتان، كل منهما مصنوعة من بطاريات مثالية،[2] ومصابيح متوهجة، ومفتاح. والبطاريات في الدائرتين متطابقة الجهد الكهربي Voltages، والمصابيح متطابقة (بالتحديد، الفتائل Filaments متساوية المقاومة Resistances). وعلينا أنّ نوضّح كيف يتغير سطوع المصابيح عند فتح أو إغلاق (كما هو مبيّن في الشكلين) كلتا الدائرتين. وإضافة للدائرة في الشكل 8.1 علينا إجابة السؤال مرة أخرى بعد عكس أقطاب البطارية الموجودة في أقصى اليمين.

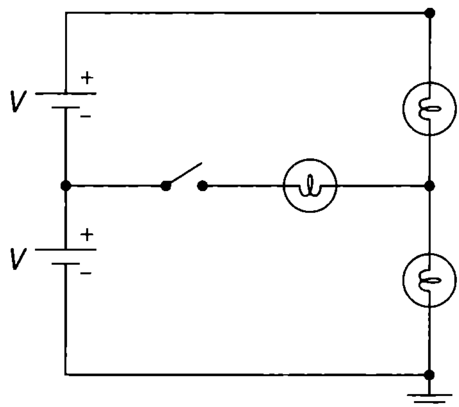
للدائرة في الشكل 8.1 مع الدائرة المفتوحة (كما هو مبين)، من الواضح، أنّ التيار في المصباحين واحد، $\frac{I'}{R}$، حيث R هي مقاومة كل فتيلة، ولذا لكل مصباح السطوع نفسه. وحالما تُغلق الدائرة، يُصبح لدينا الدائرة الموضحة في الشكل 8.3، فاستُبدل كل مصباح بالمقاومة R المكافئة له.

مع الإشارة إلى العقدة الموصلة الأرضية Ground node، الجهد في أعلى صف البطاريات يساوي $2V$، والجهد في العقدة الموصلة لكلا المصباحين هي قيمة سنسميها E. وبعدها، يمكننا كتابة المعادلات التالية:

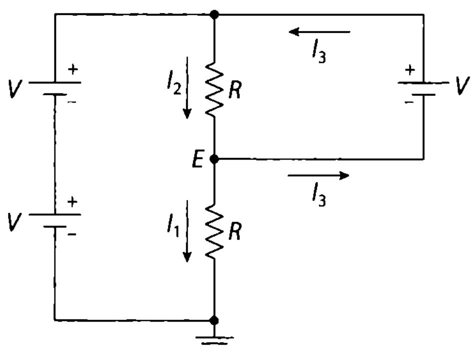
$$I_1 = \frac{E}{R},$$



الرسم التوضيحي 8.1 بعد أن تُغلق الدائرة، كيف تتغير درجة سطوع كل مصباح؟
وكيف لعكس أقطاب البطارية في أقصى اليمين أنّ تغيّر إجابتك؟



الرسم التوضيحي 8.2 بعد إغلاق الدائرة، كيف تتغير درجة سطوع كل مصباح؟



الرسم التوضيحي 8.3 الدائرة من الشكل 8.1 بعد إغلاقها.

و

$$I_2 = \frac{2V - E}{R}.$$

أيضا، لأنّ البطاريّة في أقصى اليمين،

$$E + V = 2V$$

وبذلك $E = V$. إذن،

$$I_1 = \frac{V}{R}.$$

و

$$I_2 = \frac{2V - E}{R} = \frac{2V - V}{R} = \frac{V}{R}.$$

ولاحظ أنّ I_1 و I_2 ما كانا عليه عند فتح الدائرة. لذا، لا يوجد أيٍ تغيير في درجة السطوع لكلا المصباحين. (ولاحظ أيضا، أنّ التيار في البطارية التي في أقصى اليمين، I_3، هي صفر، لأنّ $I_2 = I_1+I_3$ على العقدة الموصلة E).

ومرّة أخرى للدائرة في الشكل 8.1، ولكن الآن مع عكس أقطاب البطارية التي في أقصى اليمين، وحالما تُغلق الدائرة، نحصل على الدائرة في شكل 8.4. ومعادلات هذه الدائرة هي كما يلي:

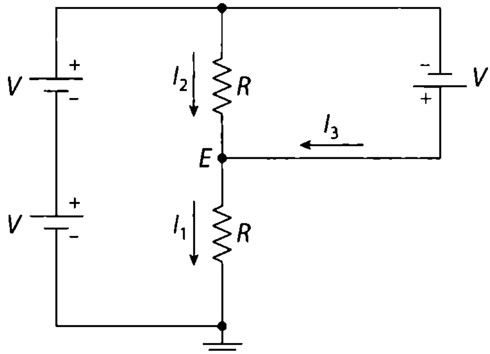
$$I_1 = \frac{E}{R}$$

و

$$I_2 = \frac{2V - E}{R},$$

الآن، بدءاً من أوّل بطارية في الصف على اليسار وبالحركة خلال البطارية التي في أقصى اليمين،

$$2V+V=E=3V$$



الرسم التوضيحي 8.4 الدائرة من الشكل 8.1 مغلقة مع عكس أقطاب البطارية التي في أقصى اليمين.

إذن،

$$I_1 = \frac{3V}{R},$$

و

$$I_2 = \frac{2V - 3V}{R} = -\frac{V}{R}.$$

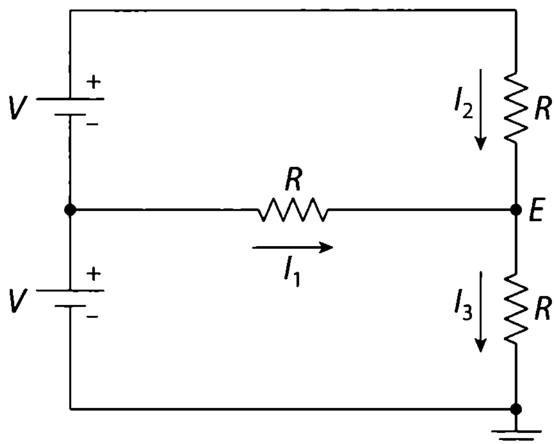
وبذلك، تضاعفت I_1 ثلاث مرات، وأنّ I_2 قد انعكس اتجاهها (ولم يتغير مقدارها). وهذا يعني أنّ سطوع المصباح الأعلى لم يتغيّر، ولكن هناك زيادة في سطوع المصباح السفلي.

ونوجّه انتباهنا الآن للدائرة المفتوحة في الشكل 8.2، والمصباح الأوسط بالتأكيد ليس مُضاء على الإطلاق، بما أنّ التيار الذي يمر خلاله يساوي صفرا، بينما للمصابيح الأعلى والأسفل السطوع نفسه، فالتيار الذي يمر خلالهما متساوي، $\frac{2V}{2R} = \frac{V}{R}$. وحالما تُغلق الدائرة نحصل على الدائرة بالشكل 8.5، ومعادلاتها هي كما يلي:

$$I_1 = \frac{V - E}{R}, \quad I_2 = \frac{2V - E}{R}, \quad I_3 = \frac{E}{R}.$$

حيث

$$I_1 + I_2 = I_3$$



الرسم التوضيحي 8.5 الدائرة المغلقة من شكل 8.2

بعدها

$$\frac{V - E}{R} + \frac{2V - E}{R} = \frac{E}{R},$$

أو

$$V - E + 2V - E = E,$$

وإذاً $V = E$. بذلك،

$$I_1 = 0,\ I_2 = \frac{V}{R} = I_3.$$

وبذلك لا يوجد لأيِ تَغيير في سطوع أي من المصابيح.

وبعض القراء قد يهزأ من استخدام المعادلات في هذه الدوائر، ويشعرون بأنّ إطلاق قوة الرياضيات هو أمر مبالغ فيه، إذ يمكن للشخص أن "ينظر إلى الدائرة ويرى" الإجابات. أنا لا أشك للحظة في أنّ بعض القُرّاء يستطيعون ذلك، في الحقيقة، قم بذلك فقط. لكن للأسف حتى مع شهادة دكتوراه في الهندسة الكهربائية، فإن الأمر لا يتطلب الكثير ليحثني على الشك في شعوري البديهي إزاء أغلب الدوائر، وأنا أعترف بهذا مع الأسف. حتى وأنا متأكد من معرفتي بماذا سيحصل في الدائرة، مازال إجراء تحليل رسمي كفيل بأن يُشعرني بإحساس أفضل. لذا، دعوني أتحدّ القراء المُتشكّكين (الذين مازالوا يسخرون) مع تغيير على الدائرة من الشكل 8.2.

افترض أنّ المصباح العلوي استُبدل بمصباح آخر يحتوي على فتيل بضعف المقاومة التي كانت في المصباحين الآخرين. ماذا سيحدث الآن بعد إغلاق الدائرة؟ سجّل إجابتك، فِي الحال، قبل استكمال القراءة.

إذا كانت الدائرة مفتوحة، فبالطبع لن يشتعل المصباح الذي في المنتصف (كما السابق)، ويمر خلال المصباح العلوي والسُفلي التيار نفسه (كما في السابق)، ويساوي الآن $\frac{2V}{3R} = 0.67\frac{V}{R}$. وبما أنّ المصباح العلوي والسفلي فتائل بمقاومات مختلفة، فلن يكونا بالسطوع نفسه، ولكن كِلا المصباحين سيكونان مشتعلين.

مع الدائرة المغلقة تصبح المعادلات مختلفة قليلاً مما كانت عليه سابقا، ولكن لهذا الاختلاف تبعات كبيرة:

$$I_1 = \frac{V - E}{R},\quad I_2 = \frac{2V - E}{2R},\quad I_3 = \frac{E}{R}.$$

بما أنّ

$$I_1 + I_2 = I_3$$

إذن

$$\frac{V - E}{R} + \frac{2V - E}{2R} = \frac{E}{R}$$

أو

$$2V - 2E + 2V - E = 2E$$

أو

$$4V = 5E$$

وبهذا $E = \frac{4}{5}V$.

$$I_1 = \frac{V - \frac{4}{5}V}{R} = \frac{1}{5}\frac{V}{R} = 0.2\frac{V}{R}$$ (كان صفرا)

$$I_2 = \frac{2V - \frac{4}{5}V}{2R} = \frac{3}{5}\frac{V}{R} = 0.6\frac{V}{R}$$ (كان $0.67\frac{V}{R}$)

$$I_3 = \frac{E}{R} = \frac{4}{5}\frac{V}{R} = 0.8\frac{V}{R}$$ (كان $0.67\frac{V}{R}$)،

لذلك، يؤدي إغلاق الدائرة إلى إشعال المصباح الأوسط (على الرغم من أنّه أقل سطوعا من المصباح الأدنى والمطابق عندما كانت الدائرة مفتوحة)، والمصباح الأعلى ينخفض سطوعه قليلا (ولكنه لا يزال أسطع من المصباح الأوسط المشتعل الآن)، وسيكون المصباح الأسفل أسطع أكثر بقليل مما كان عندما كانت الدائرة مفتوحة.

والآن، كن صريحا – هل كان ذلك موجودا فيما كتبته كجوابك قبل إجراء الحسابات الرياضياتية؟

ملاحظات

1. سميتا تيمنا بالفيزيائي الألماني غوستاف كيرتشوف Gustav Kirchhoff (1824-1887)، القاعدتين هما: (أ) مجموع فرق الجهد عبر أي دائرة مغلقة هي صفر (هذا تعبير لحفظ الطاقة)، و (ب) مجموع جميع التيارات الداخلة إلى أي عقدة وصلة هي صفر (هذا تعبير لحفظ الشحنة الكهربائية). مبدأ قانون أوم Ohm's Law- سُمّيَ نسبة إلى الفيزيائي الألماني جورج أوم George Ohm (1789-1854)- هو المبدأ المعروف جيدا بأنّ "فرق الجهد عبر المقاوم هو محصّلة قيمة المقاومة والتيار في المقاوم".
2. البطارية المثالية *Ideal* Battery هي التي تنعدم فيها المقاومة الداخلية تساوي صفرا. ودائما يكون لدى البطارية الحقيقية *Real* Battery بعض المقاومة الداخلية الموجبة، و نموذجيا تكون قليلة جدا (جزء صغير من أوم Ohm) للبطارية الجديدة، ثم تزداد المقاومة بعد ذلك بمرور الزمن.

9 كيفية قياس العمق باستعمال ساعة إيقاف

"وفي لحظة دخلت أليس إلى الجحر [وراء الأرنب الأبيض، داخل جحره]،
ولم تفكر قط بالكيفية التي ستخرج بها مرة أخرى".
لويس كارول، مغامرات أليس في بلاد العجائب
Lewis Carroll, Alice's Adventures in Wonderland

للتهيئة العقلية الصحيحة للمناقشة الرئيسية، تأمل أولاً هذا اللغز الصغير يسقط حجر من النصف الأخير من ارتفاع جدار خلال نصف ثانية. بتجاهل مقاومة الهواء، ماهو ارتفاع الجدار؟

لنعين t_1 لتكون الوقت المطلوب للنصف الأول (بالمسافة) من السقوط. وبذلك، إذا كانت x هو ارتفاع الجدار، إذاً

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}gt_1^2.$$

وبذلك

$$t_1 = \sqrt{\frac{x}{g}}.$$

إذاً t_2 هو الوقت المطلوب للسقوط بأكمله، إذاً

$$x = \frac{1}{2}gt_2^2.$$

وبذلك

$$t_2 = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

من ثم،

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}} - \sqrt{\frac{x}{g}} = \frac{1}{2}.$$

أو

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{2}{g}}-\sqrt{\frac{1}{g}}\right)=\frac{1}{2}=\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{g}}=\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{g}}.$$

ومن ثم

$$\frac{1}{4}=x\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{g}}\right)^{2}=x\,\frac{(\sqrt{2}-1)^{2}}{g}.$$

من ثم،

$$x=\frac{g}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}}=\frac{32.2}{4\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}}$$ قدم = 46.9 قدم

لاحظ - عدم اشتراك المعادلات التربيعية من الدرجة الثانية Quadratic equation. ولن نكون قادرين على الإفلات بسهولة من السؤال الرئيسي في هذا الفصل.

تخيّل أنك تقف على حافة حفرة عمودية وعميقة في الأرض. وهي عميقة لدرجة أنّها تنحدر إلى الظلام، ولايمكنك رؤية القاع. وتقرر بأنك تريد أن تعرف عمقها، وتفكّر في استعمال بعض الفيزياء البسيطة لإشباع فضولك. كل ماتحتاج إليه هو كرة حديد صغيرة (بحجم البلية الزجاجية) مع ساعة إيقاف تصادف أن تكون في جيبك. لذا، هذا ما ستفعله.

في اللحظة نفسها التي تُسقط فيها الكرة الحديدية إلى الحفرة ستبدأ ساعة التوقيت. وعند سماعك لأما رشّة (أو طرقعة إذا كانت الحفرة جافة) ستوقف الساعة. وبمعرفة أنّ سرعة الصوت هي 1,115 قدم/ثانية، وبتجاهل مقاومة الهواء على الكرة أثناء السقوط، حدّد عمق الحفرة إذا الساعة سجلت 3 ثوان. كم سيبلغ عمق الحفرة إذا سجّلت الساعة 6 ثوان؟ فسّر كيف أنّ العمق المحسوب للسقوط ذي 6 ثوان ليس ضعف عمق السقوط ذي 3 ثوان.

لنعين t_1 الزمن المطلوب لترتطم الكرة بالقاع، و t_2 الزمن المطلوب لينتقل صوت الكرة عودة من القاع إلى أعلى الحفرة ليصل إلى أذنك. بذلك، الزمن الكلي (ما تسجلة ساعة التوقيت) هو T، حيث

$$T=t_1+t_2$$

إذا كان D هو عمق الحفرة، وإذا كان s سرعة الصوت، إذاً نحن نعرف أنّ (تذكّر، نحن نتجاهل تأثير مقاومة الهواء)

$$D=\frac{1}{2}gt_1^2$$

وهذا

$$t_2=\frac{D}{s}.$$

من ثم،

$$t_1 = \sqrt{\frac{2D}{g}}.$$

وبذلك

$$T = \sqrt{\frac{2D}{g}} + \frac{D}{s},$$

أو

$$sT - D = s\sqrt{\frac{2D}{g}}.$$

بتربيع كلا الطرفين، وتجميع التعابير المتشابهة، نصل إلى المعادلة التربيعية للعمق D:

$$D^2 - \left(\frac{2s^2}{g} + 2sT\right)D + s^2T^2 = 0.$$

وحل المعادلة التربيعية المعروف يعطينا الجواب:

$$D = \frac{s^2 + sTg \pm s^2\sqrt{1 + 2\frac{Tg}{s}}}{g}.$$

في الواقع، لدينا وفرة يتعين علينا الاختيار منها، بوجود جوابين للعمق D بسبب إشارة (+ و -). بالطبع لا يمكن لكلا هذين الحلين أن يكونا صحيحين، لذا، أيّهما سنحتفظ به وأيهما سنرفضه؟ يمكننا تقرير ذلك برؤية ما ستفعله الحلول المقترحة في الحالة القصوى عندما $T = 0$. نحن نعلم فيزيائيا أنّ هذا يعني $D = 0$.

إذا استعملنا الإشارة الموجبة نحصل على $D = \frac{2s^2}{g}$، وهو خطأ واضح. لكن إذا استعملنا الإشارة السالبة نحصل على $D = 0$. لذا، عمق الحفرة هو

$$D = \frac{s^2 + sTg - s^2\sqrt{1 + 2\frac{Tg}{s}}}{g} = \frac{s^2\left[1 - \sqrt{1 + 2\frac{Tg}{s}}\right] + sTg}{g},$$

أو، أخيرا،

$$D = sT + \frac{s^2}{g}\left[1 - \sqrt{1 + 2\frac{Tg}{s}}\right].$$

وللسقوط الذي استغرق 3 ثوان يكون عمق الحفرة فيها

$$D = (1,115)3 + \frac{1,115^2}{32.2}\left[1 - \sqrt{1 + 2\frac{3(32.2)}{1,115}}\right] \text{قدم}$$

= [3,345 + 38,609 (-0.08318)] قدم

= [3,345 - 3,211] قدم = 134 قدم

وللسقوط الذي استغرق 6 ثوان يكون عمق الحفرة فيها

$$D = (1,115)6 + \frac{1,115^2}{32.2}\left[1 - \sqrt{1 + 2\frac{6(32.2)}{1,115}}\right] \text{قدم}$$

= [6,690 + 38,609 (-0.1604)] قدم

= [6,690 - 6,193] قدم = 497 قدم

وهو أكثر بكثير من ببساطة ضعف عمق السقوط ذي 3 ثوان. وإليك السبب.

في نهاية السقوط ذي 6 ثوان تتحرك الكرة بسرعة (6) 32.2 = gt قدم/ثانية = 193 قدم/ثانية، وهي أقل بكثير من سرعة الصوت. لذا، أغلب الثواني الست استُعملت للسقوط نفسه، مع جزء صغير فقط من الثواني الست المطلوبة لصوت وصول الكرة في القاع لينتقل عائدا إلى أعلى الحفرة. أي أنّ الكرة تسقط بسرعة متزايدة لأغلب الثواني الست لذلك تنتقل إلى مسافة أبعد من ضعف مسافة الانتقال أثناء سقوط الثواني الثلاث.

10 حل مسائل المقدمة

الحب يجعل العالم يدور.
- المثل الشائع الذي يفقد شيئا باعتراف الجميع عندما يُقال بصيغة أخرى من مثل:
"كالزخم الزاوي يجعل العالم يدور"

صادفنا في الفصول السابقة مفاهيم عزم القصور الذاتي Moment of Inertia وعزم الدوران Torque، وسأتوسع في الشرح هنا لنتمكن من الإجابة عن السؤالين الذين تركتهما معك في نهاية المقدمة (مع سؤال تراجع القمر عن الأرض الذي ذكرته في نهاية المثال 6 في الفصل 1). للبدء، اسمح لي بأنّ أذكرك ببعض الأمور.

إذا تحركت كتلة m بسرعة v، فسيكون لديها طاقة حركية Kinetic energy للحركة الخطية Linear Motion (خط مستقيم) تُعطى بالشكل التالي:

$$\boxed{E_{\text{linear}} = \frac{1}{2}mv^2.}$$

وجدنا في الفصل 6 أنّه حتى ولو لم تكن الكتلة تتحرك في حركة خطية ولكنها بدلاً من ذلك تدور حول نفسها في مكانها بسرعة دوران زاوي Ω راديان/ثانية، فإنّ لديها طاقة حركة دورانية *Rotational* Kinetic Energy تعطى بالصورة

$$\boxed{E_{\text{rotation}} = \frac{1}{2}I\Omega^2,}$$

حيث I هي القصور الذاتي *Moment of Inertia* للكتلة حول محور الدوران Spin axis.
هذين التعبيرين اللذين في الإطار يقترحان التشبيه التالي: I هي "مثل" m، و Ω هي "مثل" v.
لذا، إذا وسّعنا التشبيه إلى الزخم Momentum، إذن، بما أنّ الزخم الخطي هو mv، يمكننا منطقيا القول أنّ الزخم الزاوي *Angular Momentum* هو $I\Omega$.

يمكننا استعمال تعبيري الطاقة من الإطارين للإجابة عن أسئلة المقدّمة بخصوص الأسطوانتين (المجوفة والمصمتة) المتدحرجتين من على المستوى المائل (انظر: مرّة أخرى للشكل P1). وفي الزمن $t=0$ كلتا الأسطوانتين، بالكتلة m ونصف القطر R أنفسها هما على مسافة السكون L في أعلى المنحدر (بزاوية θ من المحور الأفقي). لذا، في البداية كلتا الأسطوانتين لديهما طاقة حركة ابتدائية تساوي صفر وطاقة وضع تساوي $mgL\sin(\theta)$. وعندما تتدحرج كلتا الأسطوانتين مسافة x إلى أسفل المنحدر ستكون قد بادلت بعضاً من طاقة الوضع $mgx\sin(\theta)$ بطاقتي الحركة الخطية والدورانية. أي، إذا I و$\Omega(x)$، و $v(x)$ هي عزم القصور الذاتي، ومعدّل الدوران، وسرعة الحركة الخطية للأسطوانة أسفل المنحدر، على الترتيب عندما تكون الأسطوانة عند مسافة x أسفل المنحدر، إذاً

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\Omega^2=mgx\sin(\theta).}$$

إذا كان $T(x)$ هو زمن دورة كاملة للأسطوانة وهي تنحدر للأسفل مسافة x، إذاً

$$\Omega(x)=\frac{2\pi}{T(x)},$$

وبذلك

$$T(x)=\frac{2\pi}{\Omega(x)}.$$

وبما أنّ الأسطوانة تتدحرج أسفل المستوى المائل مسافة $2\pi R$ لكل دورة، نحصل على

$$v(x)=\frac{2\pi R}{T(x)}=\frac{2\pi R}{\frac{2\pi}{\Omega(x)}}=\Omega(x)R,$$

وبذلك

$$\Omega(x)=\frac{v(x)}{R}.$$

وباستبدال هذا التعبير للسرعة الدورانية Ω في إطار المعادلة الأخيرة، نحصل على

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2}=mgx\sin(\theta).}$$

آخر تعبير صحيح لكلتا الأسطوانتين، بشكل عام، ولكن بالطبع، تختلف I للأسطوانة المصمتة والأسطوانة المجوّفة. لنتعامل مع كل أسطوانة على مدى، ابتداء بالمصمتة.

كما بينا في الفصل 6،

$$I_{\text{solid}} = \frac{1}{2} m R^2,$$

وبذلك

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m v^2 = mgx \sin(\theta) = \frac{3}{4} m v^2,$$

أو

$$v^2 = \frac{4gx \sin(\theta)}{3}.$$

بما أنّ

$$v = \frac{dx}{dt},$$

وبذلك نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{4g \sin(\theta)}{3}} \sqrt{x},$$

أو من تكامل $0 \le x \le L$ (وبذلك $0 \le t \le t_{solid}$، حيث t_{solid} هو الوقت الذي تحتاج إليه الأسطوانة المصمتة للوصول إلى نهاية المنحدر)،

$$\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{t_{\text{solid}}} \sqrt{\frac{4g \sin(\theta)}{3}} dt = 2t_{\text{solid}} \sqrt{\frac{g \sin(\theta)}{3}} = 2 \left(\sqrt{x}\right) |_0^L = 2\sqrt{L}.$$

وبذلك،

$$\boxed{t_{\text{solid}} = \sqrt{\frac{3L}{g \sin(\theta)}}.}$$

والآن لنكرر هذه الحسابات للأسطوانة المجوّفة. نحن نعرف أيضا من الفصل 6 أنّ

$$I_{\text{hollow}} = m R^2,$$

وبذلك

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgx\sin(\theta) = mv^2.$$

بذلك،

$$v^2 = gx\sin(\theta).$$

وإذا

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{g\sin(\theta)}\sqrt{x}.$$

وبذلك إذا كانت t_{hollow} هو الزمن الذي تحتاج إليه الأسطوانة المجوّفة لتصل إلى أسفل المنحدر، نحصل على

$$\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{t_{\text{hollow}}} \sqrt{g\sin(\theta)}\,dt = t_{\text{hollow}}\sqrt{g\sin(\theta)} = 2\sqrt{L}.$$

أو

$$\boxed{t_{\text{hollow}} = \sqrt{\frac{4L}{g\sin(\theta)}}.}$$

لذا، الأسطوانة المصمتة تفوز بالسباق إلى أسفل المنحدر، حسب ما $t_{\text{hollow}} > t_{\text{solid}}$.
وتخبرنا حساباتنا أيضا بالمقدار الذي تفوز الأسطوانة الصلبة، فلدينا

$$\frac{t_{\text{hollow}}}{t_{\text{solid}}} = \sqrt{\frac{4L}{g\sin(\theta)}}\sqrt{\frac{g\sin(\theta)}{3L}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.1547.$$

أي، أنّ الأسطوانة المجوّفة تستغرق وقتاً أطول بقليل من 15% لتتدحرج إلى أسفل المنحدر مما تستغرقه الأسطوانة المصمتة.

قد تتساءل ما فائدة هذه المعرفة عمليا؟ حسنا، لنفترض أنك في مسابقة مهرجان المقاطعة التي يحصل فيها الفائز على شريطة زرقاء إذا كان أسرع شخص يتدحرج أسفل منحدر- باستعمال برميل. (لقد رأيت أشياء أغرب من ذلك في مهرجانات المقاطعة!) وتُظهر النتائج التي حصلنا عليها أنّه إذا حشرت نفسك داخل البرميل سيكون أفضل من لو أنك تشبثت بالبرميل من الخارج. وعلى نحو ما، أعتقد أنّك ستختار الخيار الأول في كل الأحوال، ولكن الآن تعرف أنّه الخيار الصحيح بناء على الفيزياء النظرية إضافة إلى الحدس السليم!

والآن لنحول انتباهنا إلى سؤال تحدي آخر من المقدمة، وهو الماسورة الواقعة، (انظر: شكل P2 و P3 مرة أخرى). بداية، سأنشئ علاقة مفيدة جدا تربط عزم الدوران Torque، وعزم القصور الذاتي Moment of inertia والعجلة الزاويّة Angular acceleration. سنبدأ بتخيّل كتلة نقطية m مع قوة F مبذولة عليها لإنتاج عجلة a. بذلك $F = ma$، أو

$$a = \frac{F}{m}.$$

إذاً نقطة الكتلة هذه تتحرك بسرعة زاوية Ω راديان/ ثانية على مسار دائري بنصف قطر r، إذا سرعته المماسة Tangential speed هي $v = r\Omega$.

إذا كانت Ω تتغير بالصورة $\Delta\Omega$، إذا v تتغير بالصورة Δv وبذلك

$$v + \Delta v = r(\Omega + \Delta\Omega),$$

أو

$$\Delta v = r\Delta\Omega$$

إذا Δv و $\Delta\Omega$ يحدثان في زمن Δt، إذاً

$$\boxed{\frac{\Delta v}{\Delta t} = r\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}.}$$

وبذلك، في النهاية $\Delta t \to 0$ ستكتسب عجلة زاوية *Angular* acceleration

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = \alpha$$

وعجلة مماسة *Tangential* acceleration

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a.$$

وبذلك من التعبير في الإطار الأخير نحصل على

$$a = r\alpha$$

أو

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{\frac{F}{m}}{r} = \frac{F}{mr} = \left(\frac{r}{r}\right)\frac{F}{mr} = \frac{rF}{mr^2}.$$

تذكر من الفصل 6 أننا أطلقنا مصطلح عزم الدوران Torque على المحصلة rF، وعلى mr^2 عزم القصور الذاتي Moment of inertia لكتلة نقطية m تبعد مسافة r من مركز الدوران. وهو،

$$\text{angular acceleration} = \frac{\text{torque}}{\text{moment of inertia}},$$

أو

عزم الدوران = (عزم القصور الذاتي)(العجلة الزاوية)

والآن، عودة للشكل P2. بينما تسقط الماسورة وقبل حدوث أي انثناء (إذا حدث)، لدينا كتلتان نقطيتان متساويتان تتحركان في مسار دائري. وكتلة النقطة على المسار b هي على مسار دائري بنصف قطر L، وكتلة النقطة على c هي على مسار دائري بنصف قطر $2L$. وبما أنّ الكتلتين متساويتان فمركبات أوزانهما العمودية على طول الماسورة متساوية أيضا (لنطلق عليهما F_b و F_c). وعزم الدوران الذي تبذله هذه المركبات (حول نقطة الدوران في أسفل الماسورة، النقطة التي تدور حولها الماسورة) يُعطى $T_b = F_bL$ و $T_c = F_c2L$، أو، بما أنّ $F_b = F_c$، نحصل على

$$T_c=2T_b.$$

وعزم القصور الذاتي للكتلة النقطية على b، حول نقطة الدوران، هي $I_b = mL^2$، بينما عزم القصور الذاتي لكتلة النقطة على c، حول نقطة الدوران، هي $I_c = m4L^2$. وذلك،

$$I_c = 4I_b.$$

إذا سمينا α_b و α_c لعجلة الزاوية للكتل على b و c، على الترتيب، حينها عندما نستبدل نتائجنا لعزم الدوران T و I في آخر إطار معادلة نحصل على

$$T_b = I_b\alpha_b,$$

و

$$T_c = I_c\alpha_c.$$

وذلك،

$$\alpha_b = \frac{T_b}{I_b},$$

و

$$\alpha_c = \frac{T_c}{I_c}.$$

وبذلك،

$$\frac{\alpha_b}{\alpha_c} = \frac{\frac{T_b}{I_b}}{\frac{T_c}{I_c}} = \left(\frac{T_b}{T_c}\right)\left(\frac{I_c}{I_b}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(4) = 2.$$

أي أنّ كتلة النقطة على b لها ضعف العجلة الزاوية ما لكتلة النقطة على c. وبذلك تكون لديها سرعة زاوية أسرع مما يكون لدى كتلة النقطة على c. وبذلك، فإنّ نموذج الماسورة البسيط ينثني ويعمل على ذلك بالطريقة الموّضحة في الشكل P3 (a). وتبين الصور للمواسير أثناء الوقوع، أنّ هذا بالطبع، الطريقة التي تنثني فيها المواسير الحقيقية بينما تسقط.[1]

أخيرا، نُنهي هذا الفصل مع توضيح مثير للإعجاب للفيزياء البسيطة أثناء عملها. تذكر أنّه في المثال رقم 6 من الفصل الأول قد أخبرتك بأنّ القياسات بواسطة ومضات الليزر، باستخدام العواكس المكعبة الموضوعة على القمر من قبل رواد فضاء أبولو *11*، أظهرت أنّ مسافة القمر من الأرض تزيد بمعدل نحو بوصة ونصف لكل سنة. وسأريك الآن الكيفية التي تَحسب بها معدل التراجع هذا باستخدام حفظ الزخم الزاوي Conservation of angular momentum، أحد القوانين الأساسية في الفيزياء.

نبدأ بتخيل نظام الأرض/القمر كنظام مستقل في الكون، مع النجوم البعيدة كخلفية. فالقمر يدور حول الأرض التي تدور حول مركزها وثابتة في الفضاء بالنسبة إلى النجوم البعيدة. وهذا بالطبع ليست الحالة الواقعية، ولكنها تبسّط التحليل بينما تحتفظ ببعض الواقعية للحفاظ على أمانة الفيزياء. بينما تدور الأرض، فإن لديها زخماً زاوياً مغزلياً Spin Angular Momentum I Ω، كما استنتجنا في بداية الفصل، وبما أنّ القمر يدور حول الأرض، فإنّ لديه زخماً زاوياً مدارياً *Orbital* Angular Momentum (التي سنستنتجها بعد برهة قصيرة).

لقد أسسنا في الفصل 6 أنّ معدّل دوران الأرض آخذ بالتناقص، بسبب احتكاك المدّ والجزر. وهذا يعني أنّ زخم الأرض المغزلي الزاوي يقل. وبما أنّ الزخم الزاوي محفوظ، فإنّ في مكان ما في نظام الأرض /القمر الخاص بنا لابد أنّ الزخم الزاوي يزداد. أين هذا "المكان" ؟ المكان الوحيد الآخر هو القمر: يسبب مدّ وجزر المحيط انتقال الزخم الزاوي من الأرض إلى القمر، بالتحديد إلى الزخم الزاوي المداري للقمر. وقد يتخيل الشخص أنّ الزخم الزاوي المغزلي للقمر يمكن أن يزداد، أيضا، ولكن لم يُشاهد حدوثه. سأفترض أنّ الزخم الزاوي الدوراني للقمر هو المستفيد الوحيد من فقد الأرض للزخم الزاوي المغزلي، وسنرى إلى أين سيؤدي ذلك بنا.[2]

والآن، ما هو الزخم الزاوي المداري للقمر؟ نحن نتخيل أنّ القمر. الذي سنعتبره ككتلة نقطية m، تدور حول الأرض في مسار دائري بنصف قطر r بسرعة v. فإذا كانت السرعة الزاوية للقمر هي Ω راديان/ ثانية، إذاً

$$v = \omega r$$

وبذلك

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

وأيضا، بينما يدور القمر حول الأرض يكون القصور الذاتي له

$$I = mr^2$$

وبما أنّ الزخم الزاوي المداري للقمر هو$I\omega$، يمكننا كتابة الزخم الزاوي المداري

$$L_m = I\omega = mr^2\left(\frac{v}{r}\right) = mrv.$$

وحدات الزخم الزاوي هي (كيلوغرام x متر تربيع)/ثانية. لاحظ بحذر (إذا لم تفعل ذلك) أنّ لدى الزخم الخطي (mv) والزخم الزاوي (mrv) وحدات مختلفة. ولكن هذه النتيجة لا يجب أن تكون صادمة كما رأينا سابقا حالة مشابهة مع وحدات مختلفة للسرعة المدارية (v) والسرعة الزاوية (ω).

نحن الآن مستعدون لحساب معدل تراجع القمر. لنعين M لتكون كتلة الأرض. وبما أنّ قوة جذب الأرض للقمر هي:

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

إذن، إذا عيّنا عجلة الجذب للقمر لتساوي عجلته المركزية، سنحصل على

$$\frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r}.$$

وبذلك

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

وهذا يعني أنّ الزخم الزاوي المداري للقمر هو:

$$L_m = mr\sqrt{\frac{GM}{r}} = m\sqrt{GM}\sqrt{r}.$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى نصف القطر r، نحصل على

$$\frac{dL_m}{dr} = m\sqrt{GM}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

أو إذا قرّبنا التفاضل باستخدام تغيّرات دلتا

$$\boxed{\Delta r \approx \frac{2}{m}\sqrt{\frac{r}{GM}}\Delta L_m.}$$

وبهذا، يؤدي التغيير الموجب ΔL_m في الزخم الزاوي المداري للقمر إلى تغيير موجب Δr في نصف قطره المداري.

والفرضية الرئيسية في هذا التحليل أنّ التغير في ΔL_m يساوي التغير في ΔL_e بالمقدار في الزخم الزاوي المغزلي للأرض. ففي الفصل 6 نجد أنّ قصور الأرض الذاتي هو $0.3444 M R^2$، حيث R هي نصف قطر الأرض. وبذلك الزخم الزاوي المغزلي للأرض هو:

$$\Delta L_e = 0.3444 M R^2 \Delta \Omega$$

حيث Ω هي معدل دوران الأرض. والآن إذا كانت T هي طول اليوم (86,400 ثوان)، إذاً

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \text{ راديان/ثانية،}$$

وبما أنّ

$$L_e = 3444 M R^2 \Delta \Omega$$

وبما أنّ

$$\frac{d\Omega}{dT} = -\frac{2\pi}{T^2}$$

يدل (للتغييرات الصغيرة) على

$$\Delta \Omega = -\frac{2\pi}{T^2} \Delta T.$$

بعدها

$$\Delta L_e = -0.3444 M R^2 \frac{2\pi}{T^2} \Delta T.$$

في آخر تعبيرين ΔT هي التغيير في طول اليوم المرتبطة في التغيير في معدّل دوران الأرض في فترة زمنية T. تذكر في فصل 6 وجدنا أنّ T تتغير 0.002 ثوان في 100 سنة، وبذلك التغيير اليومي هو:

$$\Delta T = \frac{2 \times 10^{-3} \text{ seconds}}{(100 \text{ years}) \left(365 \frac{\text{days}}{\text{year}}\right)} = \frac{2 \times 10^{-5}}{365} \frac{\text{seconds}}{\text{day}}.$$

وبذلك، التغيير اليومي في الزخم الزاوي المغزلي للأرض هو:

$$\Delta L_e = -\frac{0.6888 M R^2 \pi}{(86.400 \text{ seconds})^2} \left(\frac{2 \times 10^{-5}}{365} \frac{\text{seconds}}{\text{day}}\right).$$

وبعدها نضرب 365 يوماً للحصول على التغيير السنوي في ΔL_e:

$$\boxed{\Delta L_e = -\frac{0.6888MR^2\pi}{86{,}400^2} 2 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{seconds}}.}$$

باستخدام $\Delta L_m = |\Delta L_e|$ في التعبير الذي في الإطار للتغير Δr، نحصل على التغيير السنوي في نصف قطر القمر المداري:

$$\Delta r = \frac{2}{m}\sqrt{\frac{r}{GM}}\frac{0.6888MR^2\pi}{86{,}400^2} 2 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{seconds}}.$$

أو

$$\boxed{\Delta r = \frac{4\pi(0.6888)R^2}{86{,}400^2 m}\sqrt{\frac{Mr}{G}} \times 10^{-5} \frac{1}{\text{seconds}}.}$$

بتقييم هذا التعبير للتغير Δr يجب أن يعطينا نتيجة بوحدات المتر. ولفحص ذلك، لنُدخل حصرياً جميع الوحدات لجميع المُدْخلات في التعبير الذي في الإطار:

m = كتلة القمر= 7.35×10^{22} كيلوغرام

M = كتلة الأرض = 5.98×10^{24} كيلوغرام

r= نصف قطر مدار القمر = 239,000 ميل = 3.84×10^{8} متر

G = ثابت الجاذبية = 6.67×10^{-11} متر مكعب/(كيلوغرام-ثانية تربيع)

R = نصف قطر الأرض = 6.37×10^{6} متر

وبذلك

$$\Delta r = \frac{4\pi(0.6888)(6.37 \times 10^6 \text{ meters})^2}{(8.64 \times 10^4)^2(7.35 \times 10^{22} \text{ kilograms})}$$

$$\sqrt{\frac{(5.98 \times 10^{24} \text{ kilograms})(3.84 \times 10^8 \text{ meters})}{6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{meters squared}}{\text{kilograms-seconds-squared}}}} \times 10^{-5} \frac{1}{\text{seconds}}$$

$$= 0.64 \times 10^{-18} \frac{\text{meters squared}}{\text{kilograms}}$$

$$\times \sqrt{3.44 \times 10^{43} \frac{\text{kilograms-squared} \cdot \text{seconds-squared}}{\text{meters squared}}}$$

$$\times 10^{-5} \frac{1}{\text{seconds}}$$

$$= 0.64 \times 10^{-23} \frac{\text{meters squared}}{\text{kilograms} \cdot \text{seconds}}$$

$$\times \sqrt{34.4 \times 10^{42} \frac{\text{kilograms-squared} \cdot \text{seconds-squared}}{\text{meters squared}}}$$

= 3.75 x 10^{-23} متر x 10^{21}

= 3.75 x 10^{-2} متر = 3.75 سنتيميتر

تذّكر، هذا تغيير سنوي، وبما أنّ هناك 2.54 سينتيمتر في البوصة، نحصل على معدّل تراجع 1.48 بوصة/سنة، وهي قيمة نظرية محسوبة في توافق رائع مع قياسات تجربة مكعب ليزر/ زاوية.

ملاحظات

1. انظر: Francis B. Bundy, "Stresses in Freely Falling Chimneys and Columns," *Journal of Applied Physics*, February 1940, pp. 112–123 (in particular, p. 121)..
2. العلاقة بين الأرض والقمر معقدة بشكل هائل، وهي ليست بأي معنى كلمة يمكن وصفها بأنّها "بسيطة". مقدمة قديمة، ولكنها لا تزال مفيدة جدا للموضوع في مقالة Gordon J. F. MacDonald, "Earth and Moon: Past and Future," *Science*, August 28, 1964, pp. 881–890.. لاحظ مكدونالد أنّ معدل التراجع كان ثابتا تقريبا على مدى بليون من السنوات الماضية، ولذلك قبل بليون سنة كان القمر أقرب إلى الأرض بنحو 1.5 بليون بوصة (23.600 ميل) مما هو اليوم.

11 فيزياء تكديس الكتب

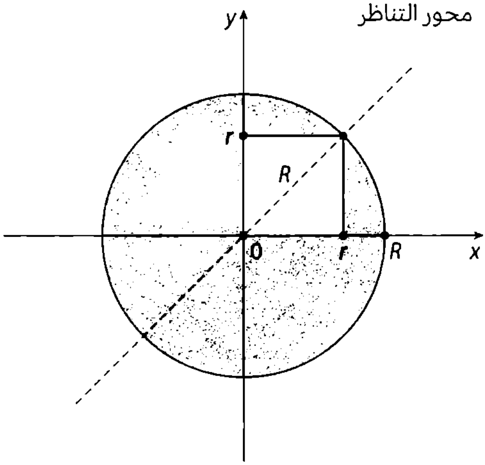
كل بخيل يعرف أن كومة من البنسات يمكن أن "تميل" قليلاً عن الخط العمودي دون أن تقع. إلى أي مدى يمكن أن يكون أعلى بنس بعيدا عن موقع الكومة العمودية؟

بول بـ. جونسون *Paul B. Johnson*[1]

تصف العبارة المقتبسة حالة لاتكف عن إذهال من يراها لأول مرة. وأجاب جونسون سؤال البنسات باستنتاج معادلة رياضياتية وحلها مع بعض الحجج البارعة. وسأفعل ذلك هنا، باستعمال بعض الفيزياء البسيطة، التي سيؤدي فيها مفهوم مركز الكتلة *Center of Mass* لجسم ممتد مكانيا دورا مهما. ومركز الكتلة هو النقطة التي يمكن لنا تخيل أن كل كتلة الجسم تكون متمركزة فيه ككتلة نقَطية *Point* Mass. وغالبا ما يكون مركز الكتلة واضحا بالفحص بسبب التناظر Symmetry. فعلى سبيل المثال، مركز الكتلة لكرة صلبة ذات كثافة منتظمة هي المركز الهندسي للكرة. وبالمثل، مركز كتلة الطوق (لكن لاحظ أنّ في هذه الحالة، لا توجد كتلة في مركز الكتلة فعليا). أمّا إذا كان الجسم الممتد معقدّاً ولا ينطبق عليها حجة التناظر، إذاً في هذه الحالة يجب حساب مركز الكتلة. ففي أبسط حالة، افترض أنّ لدينا عدد N من مراكز الكتل، m_i، $1 \leq i \leq N$، وموقعها في (x_i, y_i, z_i). بعدها، الإحداثي x لمركز الكتلة يُعطى من ثم

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

والتعابير نفسها للإحداثيات Y_C و Z_C.



رسم توضيحي 11.1 قرص دائري مع إزالة مربع

في بعض الأحيان، عندما يبدو التناظر غائباً، هو في الواقع ليس كذلك. ومثال على ذلك – وهو المفضل لدى مدرسي فيزياء المرحلة الجامعية الأولى عند الحاجة إلى سؤال لامتحان قصير مفاجئ مبين في الشكل 11.1. هنا ترى قرصاً دائرياً ذا سماكة وكثافة منتظمة، مع قص أكبر مربع محتمل من الربع الأيمن الأعلى. وعندما كان القرص سليما، أخبرنا التناظر بأنّ مركز الكتلة كان في مركز تقاطع المحورين. ولكن بعد إزالة المربع لم تعد هذه الحالة نفسها– وهذا هو السؤال:

أين هو مركز الكتلة للقرص المقصوص؟ لنطلق على إجابة السؤال (X,Y). والآن، حتى مع القص مازال يوجد بعض التناظر في القرص لمجادلة $Y = X$ (هذا، "كمحور التناظر" كما هو موضح في الشكل 11.1، لا يوجد ما يميز اتجاهات x وy). هذه الملاحظة تساعد قليلا، ولكن ما زلنا مع السؤال، ماهو X؟

مركز كتلة المربع المقصوص من القرص هو، بالتناظر، في منتصف المربع. من الهندسة البسيطة (تذكر نظرية فيثاغورس Pythagorean theorem)، إذا كان نصف قطر القرص هو R، إذا طول حافة المربع هو $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$، وبذلك مركز المربع هو عند $(\frac{R}{2\sqrt{2}}, \frac{R}{2\sqrt{2}})$. الآن، إليك الملاحظة المهمة: إذا أعدنا المربع إلى مكانه، سنحصل على القرص السليم مرة أخرى. من سيجادل في ذلك؟ لذلك، إذا m_1 هي كتلة القرص المقصوص و m_2 هي كتلة المربع، ستصبح معادلة مركز الكتلة نتيجة تجميع الكتل المنفردة إذاً

$$0 = \frac{m_1 X + m_2 \frac{R}{2\sqrt{2}}}{m_1 + m_2}.$$

والصفر الذي على اليسار، كما بينا بالتناظر، أنّ الإحداثي السيني x – coordinate لمركز الكتلة للقرص الكامل مرة أخرى. لذلك، هكذا فقط، نحصل على

$$X = -\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{R}{2\sqrt{2}}\right).$$

أو، بما أنّ كثافة وسماكة كل من القرص والمربع منتظمة، فإنّ كتل هذين الجسمين متناسبة طرديا مع مساحات سطحهما (A_1 و A_2 على الترتيب)

$$X = -\frac{A_2}{A_1}\left(\frac{R}{2\sqrt{2}}\right).$$

ومن الهندسة نحصل على

$$A_1 = \pi R^2 - A_2$$

و

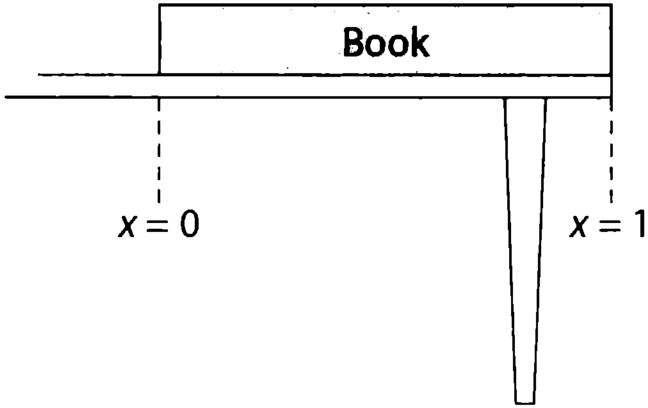
$$A_2 = \frac{R^2}{2}.$$

وبذلك،

$$X = -\frac{\frac{R^2}{2}}{\pi R^2 - \frac{R^2}{2}}\left(\frac{R}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{R}{(2\pi - 1)2\sqrt{2}} = -0.06692R(= Y).$$

أليس ذلك ماهرا؟ حسنا، الآن ترى كيف تعمل معادلة مركز الكتلة، هيّا بنا نذهب إلى المواضيع الحقيقة لهذا الفصل.

بدلا من بنسات جونسون (ستعرف السبب بعد قليل) تخيّل كتاباً بطول 1 وبكتلة 1 موضوعاً على سطح طاولة، بحيث يكون الطرف الأيمن للكتاب موازياً طرف الطاولة، كما هو موضّح في الشكل 11.2. والطرف الأيسر من الكتاب على $x = 0$، وبذلك الطرف الأيمن من الكتاب (وطرف الطاولة) على $x = 1$. ومركز كتلة الكتاب على $x = \frac{1}{2}$، وبذلك يمكننا أن ندفع الكتاب إلى الأمام مسافة $\frac{1}{2}$ قبل أن يقع الكتاب من على الطاولة. ويظهر الكتاب خارج الطاولة بقدر $\frac{1}{2}$، ويُدعى ذلك بالتدلي *Overhang*، ويُدل عليها S. لذلك، لكتاب واحد، لدينا $S(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1)$.



رسم توضيحي 11.2 كتاب موضوع على الطاولة

والآن تخيّل كتابين مثله موضوعين فوق بعضهما بترتيب فوق الطاولة. من تحليلنا الأوّل نعرف أنّه يمكننا أن نحرك الكتاب العلوي إلى الأمام مسافة $\frac{1}{2}$ قبل أن يقع من على الكتاب السفلي. ومركز كتلة الكتاب العلوي الآن هو على $x = 1$. ومركز كتلة الكتابين مع بعضهما هي:

$$x = \frac{1\left(\frac{1}{2}\right) + 1(1)}{2} = \frac{3}{4}.$$

وبذلك يمكننا تحريك الكتابين مع بعضهما إلى الأمام مسافة $\frac{1}{4}$ باتجاه حافة الطاولة قبل أن يسقطا من عليها. والآن، بروز الكتاب العلوي خارج حافة الطاولة هو:

$$S(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

لنفعل ذلك مرة أخرى فقط، مع ثلاثة كتب متطابقة مرصوصة بترتيب على الطاولة. من نتائجنا السابقة نعرف أنه يمكننا أن نحرك الكتاب العلوي إلى الأمام بمسافة $\frac{1}{2}$ قبل أن يقع من على الكتاب الأوسط، وبعدها يمكننا أن نحرك الكتابين الذين في الأعلى إلى الأمام بمسافة $\frac{1}{4}$ قبل أن يسقطا من على الكتاب السفلي. ومركز كتلة الكتابين العلويين مع بعضهما هو الآن على $x = 1$. ومركز كتلة الكتب الثلاثة مع بعضها هو كما يلي:

$$x = \frac{1\left(\frac{1}{2}\right) + 2(1)}{3} = \frac{5}{6}.$$

وبذلك يمكننا تحريك الكتب الثلاثة مع بعضهم مسافة $\frac{1}{6}$ باتجاه حافة الطاولة قبل أن تسقط من عليها. والآن بروز الكتاب العلوي خارج حافة الطاولة يساوي:

$$S(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

الآن ربما قد بدأت بالشك في ذلك، عموما، إذا استمرينا بعمل ذلك، أي تكديس كتب أكثر، سنجد أنّ

$$S(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

يمكننا التحقق من هذا الشك بالاستقراء. أي، لنفرض ذلك لعدد $n - 1$ من الكتب،

$$S(n-1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},$$

وبعدها سنبين أنّ ذلك يفترض

$$S(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

وسيعني ذلك، بما أنّنا بينا سابقا بالحساب المباشر أنّ الصيغة المفترضة $S(n)$ تسري على $n = 3$، وكذلك على $n = 4$ (مما يعني أنه يسري على $n = 5$، وهكذا). ونعرف أيضا من الحسابات المباشرة أنّ صيغتنا تسري على $n = 1$ و $n = 2$، أيضا، بالطبع.

لذلك قبل التعديل النهائي للكتاب السفلي (وجميع الكتب فوقه)، الكتب الأعلى n-1 لديها مركز كتلة مجتمعة في $x = 1$ قبل أن تسقط من على الكتاب السفلي. ويبرز الكتاب العلوي خارج الطاولة $S(n\text{-}1)$. ومركز الكتلة لمجموعة n من الكتب هو:

$$x = \frac{1\left(\frac{1}{2}\right) + (n-1)(1)}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} = \frac{1 + 2(n-1)}{2n} = \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}.$$

وبذلك يمكننا تحريك مجموعة n من الكتب إلى الأمام مسافة $\frac{1}{2n}$ باتجاه حافة الطاولة قبل أن تقع هذه المجموعة من عليها. لذلك،

$$S(n) = S(n-1) + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

كما اعتقدنا، وبرهاننا بالاستقراء انتهى.

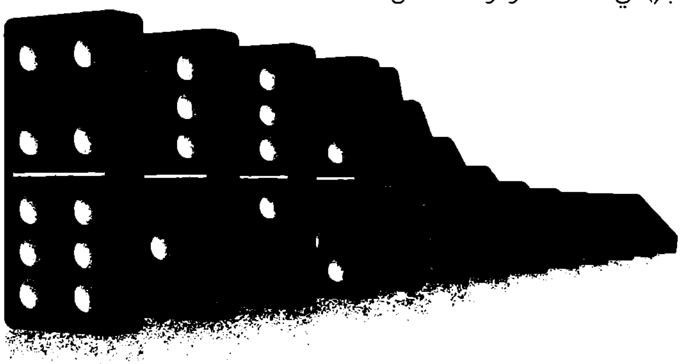
والآن، هنا "المفاجأة " ما هو أكبر حجم يمكن للدالة $S(n)$ أن يكون؟ الجواب: بالحجم الذي تريد! وذلك لأنّ $S(n)$ جزء من السلسلة التوأفقية، والمعروف أنها تتضخم حين $n \to \infty$[2]. كما قال الفيزيائي الروسي جورج غامو George Gamow (1904-1968) في أحد كتبه حين تطرق

إلى هذه المسألة:[3] "بتكديس عدد لا منتهٍ من الكتب... يمكننا جعل الكتاب العلوي أن يبرز أي مسافة مرغوب فيها خارج حافة الطاولة". ولكن جملته التالية كانت بعيدة عن الصواب: "بسبب سرعة تناقص مساهمة كل كتاب جديد، ومع ذلك، سوف نحتاج مكتبة الكونغرس Library of Congress بأكملها لجعل التدلي يساوي ثلاثة أو أربعة أطوال الكتاب"! وهذا ليس صحيحا.

إنه من السهل برمجة الحاسوب لتقييم $S(n)$ لقيم مُعطاة لـ n في الحقيقة، يتعدى $S(n)$ العدد 3 عندما تكون $n = 227$، ويتعدى $S(n)$ العدد 4 عندما تكون $n = 1{,}674$. ولا تقترب أي قيمة من n من عدد الكتب في مكتبة الكونغرس. إنها قصة مختلفة تماما لقيم أكبر من $S(n)$ وعلى الرغم من ذلك: التدلي $S(n)$ يتعدى 50، على سبيل المثال، عندما تكون n أكثر 1.5×10^{43}. والآن هذا أكثر بكثير من كتب مكتبة الكونغرس![4]

ظهور ملاحظة بول جونسون Paul Johnson الخاصة بمسألة تكديس البنسات في المجلة الأمريكية للفيزياء *American Journal of Physics* (ملاحظة 1) حفزت الرد الآتي من فيزيائي بجامعة ولاية أوهايو The Ohio State University الذي حل المسألة بنفسه قبل بضع سنين: "لإثبات نتيجة [التدلي] "فيزيائيا"، أنا وطالب دراسات عليا زميل لي كدّسنا ملزمات من مجلدات مجلة المراجعات الفيزيائية *The Physical Review* ذات مساء، حتى حصلنا على موازن مذهل بشكل كبير وتركناه ليكتشفه أمين مكتبة الفيزياء في صباح اليوم التالي وسط اندهاشه".[5] من يقول إنّ الفيزيائيين غالبا ما يكونون مهووسين خجولين وهادئين؟ في كتابي – وكما توضح رسالة آينشتاين – بعضهم أشخاص مجانين وجامحون!

قبل ترك موضوع مركز الكتلة العام، سأُنهي هذا الفصل بعرض تطبيق جاد أكثر من بناء رزم مائلة من البنسات والكتب، تحديدا، توضيح دراماتيكي للنمو الأسي للطاقة Exponential (بالتأكيد، متفجّر) في سلسلة ردود الأفعال Chain Reaction.



رسم توضيحي 11.3 سلسلة ردود الأفعال لدومينوز

لنمذجة تقسيم النيوترونات Neutrons النوى الذرية على التوالي Atomic Nuclei، كما يحدث في قنابل الانشطار الذري Atomic Fission Bombs، سوف نستخدم سقوط الدومينو لضرب الدومينو الأكبر قليلا، الذي سوف يضرب بدوره دومينو أكبر، وهلم جرا.[6] (بخلاف

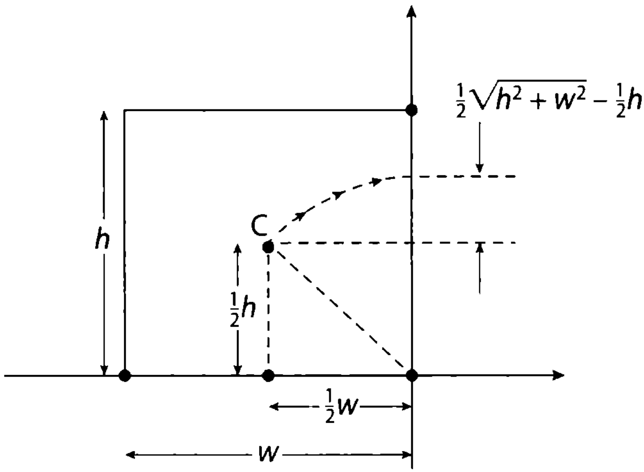
الدومينوز في الشكل 11.3، التي جميعها بالحجم نفسه). ويمكن للطاقة الداخلة المطلوبة لإسقاط الدومينو الأول أن تكون صغيرة جدا، بينما تكون الطاقة المحررة من آخر دومينو أكبر ببلايين المرات (سنثبت ذلك بعد قليل). ويمكنك العثور على فيديوات على اليوتيوب YouTube لمثل سلسلة ردود أفعال الدومينوز هذه، ولكنها فقط للمشاهدة الترفيهية. هنا سأريك كيف تحسب الطاقات المشاركة، باستخدام الفيزياء البسيطة.

يصف الاتصال في المذكرة 6 سلسلة من 13 دومينوز تكبر بازدياد، كلها مصنوعة من بلاستيك أكريليك، مع قياسات أصغر دومينو (دومينو 1#)

السماكة (ω) = 1.19×10^{-3} متر

العرض (l) = 4.76×10^{-3} متر

الارتفاع (h) = 9.53×10^{-3} متر



الرسم التوضيحي 11.4 هندسة الدومينو القائم

وقياس أكبر واحد (دومينو # 13)

السماكة (ω) = 76.2×10^{-3}متر

العرض (l) = 305×10^{-3} متر

الارتفاع (h) = 610×10^{-3} متر

ابتداء بأصغر دومينو، كل دومينو لاحقة في السلسلة هي أكبر قليلا من 1.5 مرّة في كل بعد من التي تسبقها، وكان مذكوراً في المذكرة 6 أنّ الطاقة المطلوبة لإسقاط دومينو 1# هي 0.024×10^{-6} جول (انظر: ملاحظة 4 في فصل 3 مرة أخرى)، والطاقة المحررة من سقوط الدومينو رقم 13# هي تقريبا 51 جول، معامل تضخيم الطاقة بمقدار 2 بليون! ومؤلف المذكرة 6 قال: "من السهل حساب[هذه الطاقات]" ولكنه لم يُرِنا كيف. لذا، لنحسبها بأنفسنا.

يبين الشكل 11.4 قطاع الدومينو، مع وجهه الأمامي على المحور الصادي y–axis وحافته

الأمامية السفلية على النقطة المركزية (لك أن تتخيل أن العرض متعامدا على الصفحة). ومركز الكتلة C، للدومينو، طبقا للتناظر، واقعة على نقاط المنتصف المشتركة لكل الإحداثيات. تخيّل الآن أنّ القوة مبذولة على الوجه الأيسر للدومينو. وسيبدأ الدومينو بالدوران مع اتجاه عقارب الساعة حول الحافة الأمامية السفلية، إنّ مركز الكتلة سيرتفع حتى يصل فوق الحافة الأمامية مباشرة. وأي دوران إضافي للدومينو سيضع C بعد الحافة الأمامية، وبعدها يطيح الدومينو.

عندما تكون مركز الكتلة C مباشرة فوق الحافة الأمامية ستكون قد ارتفعت خلال مسافة

$$\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{2}\right)^2}-\frac{h}{2}=\frac{h}{2}\sqrt{1+\left(\frac{w}{h}\right)^2}-\frac{h}{2}=\frac{h}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{w}{h}\right)^2}-1\right].$$

وبذلك، تزداد الطاقة الكامنة للدومينو بمقدار

$$\Delta E = mg\,\Delta y = mg\frac{h}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{w}{h}\right)^2}-1\right],$$

حيث m هي كتلة الدومينو. ΔE هي الطاقة الداخلة المطلوبة للإطاحة بالدومينو. والكتلة m هي:

$$m = \rho wlh،$$

وحيث ρ هو كثافة البلاستيك الأكريليك. وبعد بحث سريع على الإنترنت وجدنا أنّ قيمة ρ هي بين 1.15 و 1.2 غرام/ سينتيمتر مكعب، سأستخدم معدل 1.18 غرام/سينتيمتر مكعب = 1.18×10^3 كيلوغرام/متر مكعب. لذلك، للدومينو # 1، الكتلة هي:

$m = 1.19 \times 4.76 \times 9.53 \times 10^{-9}$ كيلوغرام/متر مكعب

$= 63.7 \times 10^{-6}$ كيلوغرام

وبذلك

$$\Delta E = \frac{1}{2}63.7\times10^{-6}\ \text{kilograms}\times 9.8\frac{\text{meters}}{\text{seconds squared}}$$

$$\times 9.53\times10^{-3}\ \text{meters}\left[\sqrt{1+\left(\frac{1.19\times10^{-3}}{9.53\times10^{-3}}\right)^2}-1\right]$$

$$= 2.975\times10^{-9}\ \frac{\text{kilograms}\cdot\text{meters-squared}}{\text{seconds squared}}(0.00777)$$

$= 23 \times 10^{-9}$ جول

$= 0.023 \times 10^{-6}$ جول،

وهو قريب جدا من القيمة التي أعلن عنها مؤلف المذكرة 6 (الذي اقترح أنّ الطاقة المبذولة صغيرة جدا يمكن "بذلها بدفع [الدومينو] بعصاة من القطن الناعم").

وأخيرا، لحساب الطاقة المتحررة من وقوع أكبر دومينو، نبدأ بطاقتها الأولية وبعده إضافة الطاقة المطلوبة لرفع مركز الكتلة لتصل إلى فوق الحافة الأمامية للدومينو. وبعدها نطرح الطاقة الكامنة التي اكتسبها الدومينو بعد السقوط. والنتيجة هي الطاقة المتحررة من قبل الدومينو. لذلك، عندما يكون الدومينو # 13 قائما يكون مركز كتلته على ارتفاع 305×10^{-3} متر. وعندما ترتطم فيها الدومينو # 12 يرتفع مركز كتلة الدومينو # 13 إلى

$$\frac{1}{2}\sqrt{(610)^2 + (76.2)^2} \times 10^{-3}$$ أمتار = 307.4×10^{-3} أمتار.

وعندما يسقط دومينو 13#، سيصبح البعد الأصلي للسُمك ω هو الارتفاع h الجديد، وبذلك يصبح مركز الكتلة على ارتفاع 38.1×10^{-3} متر. والتغير (الانخفاض) في الطاقة الكامنة للدومينو تُصبح

$$mg\Delta y = \rho\omega lhg\Delta y$$

1.18×10^{3} = كيلوغرام/متر مكعب x 9.8 أمتار/ثانية تربيع

$305 \times 76.2 \times 610 \times 10^{-9}$ x متر مكعب

$(307.4 - 38.1) \times 10^{-3}$ x أمتار = 44 جول

هذه النتيجة "قريبة" من 51 جول ولكن مازالت بعيدة لتبرر بعض القلق. وحدسي أنّ مؤلف المذكرة 6 ببساطة أجرى حساب تقريبي وتجاهل حقيقة أنّ مركز كتلة الدومينو الواقع في الحقيقة لم يكن على ارتفاع صفر. أي، عمل بحساب $mg\Delta y$ ولكنه استعمل 307.4×10^{-3} متر للتغير Δy، الذي ينتج منه انخفاض في الطاقة الكامنة بمقدار 50.4 جول.

معامل تضخيم الطاقة المحقق بوقوع 13 دومينوز هو، من الحسابات هنا، القيمة المثيرة للإعجاب

$$\frac{44}{0.023 \times 10^{-6}} = 1.9 \times 10^{9} = 1.9$$ بليون!

ملاحظات

1. هذه هي كلمات الافتتاحية في مذكرة جونسون Johnson التي تحمل عنواناً ذكياً و تشير في وقت واحد إلى المال الإيطالي وبرج ذلك البلد الشهير في بيزا Pisa: "Leaning Tower of Lire," *American Journal of Physics*, April 1955, p. 240.
2. إليك شرح بسيط عن ذلك:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S(n) &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots\\ &> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots\\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots,\end{aligned}$$

فتستمر باستبدال كل تعبير تتابع فرعي بالطول 2^k (حيث $k \geq 1$) في المتسلسلة الأصلية مع تعبير تتابع قرعي حاصل جمعه $\frac{1}{2}$.لذلك، أقل حد على المحصلة، هو مالانهاية، وبذلك $\lim_n \rightarrow \infty\ S(n) = \infty$.

3. George Gamow, *Matter, Earth, and Sky* (2nd ed)., Prentice-Hall, 1965, P20. لم يُفاضل فعليا $S(n)$، كما فعلنا هنا، ولكن ببساطة أشار إليها.

4. هذه القيمة العددية الضخمة (هي أكبر بكثير من عدد النجوم في الكون، والمقدرة لتكون "مجرّد" 10^{22}) من الواضح لا يمكن إيجادها ببساطة من تشغيل الحاسوب لإجراء عمليات إيجاد محصلة السلسلة التوافقية. لتفسير كيفية حسابها، انظر: R. P. Boas, Jr, and J. W. Wrench, Jr, "Partial Sums of the Harmonic Series," *American Mathematical Monthly*, October 1971, pp. 864–870، الذي يعطي قيمة n الدقيقة عند اجتياز $S(n)$ 50: n = 15092688622113788323693563264538101449859498. هل تعرف كيف تقول ذلك؟ أما أنا فلا!

5. Leonard Eisner, "Leaning Tower of the Physical Reviews," *American Journal of Physics*, February 1959, pp. 121–122.

6. هذا النقاش حول الدومينو مستوحى من رسالة موجزة Lorne A. Whitehead, "Domino 'chain reaction,' " *American Journal of Physics*, February 1983, p. 182..

12 فيزياء أقمار الاتصالات الاصطناعية

[أحبُّ] أن أتكلم عن الفضاء للجمهور غير العلمي. فهم المقام الأول، لا يستطيعون التأكد إذا كنت ما تقوله صحيحا أم لا. وفي المقام الثاني، لا يستطيعون تخمين ما تقوله لهم على أي حال – لذا يشهقون فقط باندهاش وتساؤل، ويصفقون لك بحرارة لكونك ذكياً لدرجة أنك تتحدث عن أشياء صعبة الاستيعاب. وأنا لا أُفصح أبدا عن أن كل ما عليك فعله هو تعيين قوة الطرد المركزي مساوية لقوة الجاذبية والحل لإيجاد سرعة [الأقمار الاصطناعية]. هذا كل ما في الأمر!

لِي أي. دو بردج *Lee A. DuBridge* (رئيس معهد كاليفورنيا للتكنولوجيا (اختصارا: المعهد كالتيك *Caltech*)، في حديث عشاء في لقاء الربيع للجمعية الفيزيائية الأمريكية 1960

نحن نادرا ما نفكر فيها - كرات من المعادن محشوة ومعبأة بكثافة بالإلكترونيات مع هوائيات منتصبة مثل القنفذ تندفع بسرعة حول الأرض بسرعات تقاس بالأميال في الثانية وفي أحيانٍ مئات، بل آلاف، من الأميال فوق رؤوسنا.

ومع ذلك، في كل مرة نجري فيها مكالمة هاتفية، أو نشاهد بثا مباشرا لبرنامج أخبار تلفزيوني من أوروبا Europe أو الشرق الأوسط Middle East، أو نبحث عن شيء على شبكة الإنترنت في غوغل Google، تكون الأقمار الاصطناعية للاتصالات مشتركة في ذلك كله. وفي هذا الفصل سوف أطلعكم على ما كان يتحدث عنه دوبريدج DuBridge، مع ثلاثة حسابات من الفيزياء البسيطة لهذه الإبداعات المذهلة للعلوم الحديثة، والأشياء التي كانت "خيالاً علمياً مجنوناً" قبل أكثر بقليل من بضعة عقود مضت.

لحسابنا الأول، لنعد إلى 1957، السنة التي أطلق فيها الاتحاد السوفييتي Soviet Union أول قمر اصطناعي في العالم (سبوتنك 1 *Sputnik 1*) إلى ما يطلق عليه المدار الأرضي المنخفض Low Earth orbit. يطير سبوتنك بسرعة فوق سطح الكوكب بارتفاع يتفاوت بين 132 ميلاً إلى 582 ميلاً ليُتم دورة كاملة كل 96.2 دقيقة (تُدعى دورة القمر الاصطناعي *Period* of the satellite). وهذه القيمة هي نتيجو مباشرة لقانون التربيع العكسي لقوة الجاذبية لنيوتن Newton's inverse square law of gravitation، وسأبين لاحقا كيف نستنتج الدورة.

بما أنّ المدار بيضاوي وليس دائرياً سنتعامل معه كمدار دائري ونبرر التقريب كالتالي: بما أنّ نصف قطر الأرض يساوي 6،380 كيلومتراً، أو 3،965 ميلاً، والمسافة التي يبعدها سبوتنك عن

مركز الأرض تتفاوت بين 4،097 ميلاً إلى 4،547 ميلاً. أي أنّ المسافة كانت 225 ± 322 ,4 ميل، أو 4, %5 ± 322 (وهو 954 ,6 ± 5% كيلومتر). سنفترض كتقريب أوّلي أنّه يمكننا تجاهل التفاوت 5% الذي يُعامل المدار كمدار دائري ذي نصف قطر $R_S = 6.954 \times 10^6$ متر.

والآن دَعْ m و M لتكون كتلة سبوتنك *1* والأرض على التوالي. وباتباع دوبريدج، نُعيّن عجلة جاذبية سبوتنك لتساوي عجلته المركزية وبذلك نكتب

$$\frac{\frac{GMm}{R_s^2}}{m} = \frac{v^2}{R_s},$$

حيث G ثابت الجاذبية العام الذي صادفناه لأول مرة في الفصل 5، وv هي السرعة المدارية لسبوتنك. وبذلك،

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_s}}.$$

وتكون الفترة إذاً

$$T = \frac{2\pi R_s}{v} = 2\pi R_s\sqrt{\frac{R_s}{GM}}.$$

إذاً، باستخدام $G = 6.67 \times 10^{-11}$ متر مكعب/ كيلوغرام- ثانية تربيع و $M = 5.98 \times 10^{24}$ كيلوغرام، نحصل على

$T = 2\pi\ (6.954 \times 10^6)$ أمتار

$$\times \sqrt{\frac{6.954 \times 10^6 \text{ meters}}{\left(6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{meters cubed}}{\text{kilograms-seconds-squared}}\right)(5.98 \times 10^{24} \text{ kilograms})}}$$

$$= 43.693 \times 10^6 \sqrt{0.174 \times 10^{-7}} \text{ seconds}$$

$$= 43.693 \times 10^6 \sqrt{174 \times 10^{-10}} \text{ seconds}$$

$576 \times 10^6 \times 10^{-5}$ = ثواني = 5،760 ثانية

= 96 دقيقة

الذي يتفق جيدا مع الدورة المرصودة لسبوتنك *1*.

مدار الأرض المنخفض ليس مدارا جيدا لقمر اتصالات، على سبيل المثال، سبوتنك *1* لم يكن مرئياً من أي نقطة على الأرض تحت مداره لمدّة طويلة إذ كان يطير دوريا بسرعة رأسيا

من أفق إلى أفق. وفي كل مرة ينقطع فيها خط الرؤية، لم تكن هناك وسيلة للاتصال بالقمر الاصطناعي حتى عودته مرة أخرى لعبوره الرأسي. والقمر الأكثر فائدة للاتصالات هو المثبت رأسيا، والذي يبدو كأنه يحوم في الفضاء. ويحدث ذلك إذا كان القمر الاصطناعي عالياً لدرجة يتطابق معها الزمن المداري بالضبط (متزامن مع) زمن دوران الأرض. ويُطلق على هذا النوع من الأقمار الاصطناعية ذات المدار المتزامن مع الأرض *Geosynchronous Orbit*. ماارتفاع هذا المدار؟

للإجابة عن هذا السؤال، نرجع لمعادلة دورة القمر الاصطناعي، التي سنحلها لإيجاد R_s كدالة للزمن T. لذلك.

$$T^2 = 4\pi^2 R_s^2 \frac{R_s}{GM} = 4\pi^2 \frac{R_s^3}{GM}.$$

وبذلك

$$R_s = \left(\frac{T^2 GM}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

بتعيين $T = 86{,}400$ ثواني، وبما أنّ دورة القمر الاصطناعي المتزامن مع دورة الأرض فوق خط الاستواء هي يوم واحد (من التعريف!)، نحصل على

$$R_s = \left[\frac{\left[\begin{array}{l}(86.400^2 \text{ seconds squared})\left(6.67\times10^{-11}\,\frac{\text{meters cubed}}{\text{kilograms-seconds-squared}}\right)\\ \times(5.98\times10^{24}\text{ kilograms})\end{array}\right]}{4\pi^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\left[\frac{(8.64\times10^4)^2\,(6.67\times10^{-11})\,(5.98\times10^{24})}{4\pi^2}\right] \text{ أمتار}$$

هذه المسافة من مركز الأرض، وبذلك يكون ارتفاع القمر الاصطناعي المتزامن مع دورة الأرض فوق سطح الأرض هو

(26,258 - 3,965) ميل = 22,293 ميل.

وهناك طريقة ذكية أخرى لحساب هذا الجواب. أولا، تخيل قمرا اصطناعيا متزامناً مع دوران الأرض في المدار، وبعدها اعتبر أنّه ليس القمر الاصطناعي الوحيد للأرض، فهناك أيضا القمر. بعدها تذكّر قانون كيبلر الثالث Kepler's third law من الفصل 5، الذي ينص على أنّه لجسم ضخم (في الفصل الخامس كانت الشمس، والآن هي الأرض) مع الأقمار في أبعاد متفاوتة من مركز الجسم، مربع زمن الدوران لكل قمر متناسب مع مكعب معدل بُعده عن الجسم الضخم. ونعرف أنّ القمر يبعد عن الأرض (مركز الأرض) 239،000 ميل مع زمن دورة مرصودة تساوي 27.3 يوم. وللقمر الاصطناعي المتزامن مع الأرض دورة تساوي يوماً واحداً

ويبعد مسافة h من مركز الأرض. لذا، يخبرنا كيبلر أنّ

$$\frac{(27.3)^2}{1^2} = \frac{(239{,}000)^3}{h^3} = 745.29$$

مع h بالميل. من ثم،

$$h = \left(\frac{239{,}000^3}{745.29}\right)^{1/3} = \frac{239{,}000}{9.066}\ \text{miles} = 26{,}362$$

من مركز الأرض. وبذلك يبلغ ارتفاع القمر الاصطناعي المتزامن مع الأرض من فوق سطح الأرض

(26,326 - 3,965) ميل = 22,361 ميل

وهو قريب جدا من نتيجة حسابنا الأول للارتفاع.

القمر الاصطناعي المتزامن مرتفع لدرجة أنّ مقاومة الهواء معدومة، والمدار ثابت. ولا ينطبق ذلك على المدار المنخفض.، إذ يتعرض القمر لمقاومة جوية كبيرة. فمدار سبوتنك 1 على سبيل المثال، قد تباطأ خلال 3 أشهر، وسقط عائدا إلى الأرض ككرة نارية. ونتيجة مفاجأة للمقاومة، وهي عكس حدس أغلب الناس، أنّ المقاومةَ الجويةَ على القمر الاصطناعي تزيد من سرعته. نحن دائما نفكر في قوة المقاومة كقوة تراجع أو تخفيف، ولكنها ليست الحالة للأقمار الاصطناعية. هذا التأثير مدهش لدرجة أنّه يسمى مفارقةَ القمر الاصطناعيِ *Satellite Paradox*.

لرؤية كيف يحدث هذا، لنكتب قوة المقاومة f_d. ومن المثير للاهتمام، لن نحتاج إلى معرفة أي تفاصيل متعلقة بالقوة f_d غير أنها دالة ذات قيمة موجبة (للسرعة المدارية، لمساحة المقطع العرضي للقمر الاصطناعي، وكثافة الغلاف الجوي عند الارتفاع المداري). سنبدأ بحساب الطاقة الكلية للقمر الاصطناعي، وهو، محصلة طاقتي الحركة والوضع (P.E. + K.E.)، سنفترض أنّ مركز الأرض في أي نظام إحداثيات هو على $r = 0$، وأنّ القمر الاصطناعي على مسافة $r = R_s$ من المركز. وبأخذ صفر طاقة الوضع P.E. عند مالانهاية (هذه نقطة مرجعية قياسية يستعملها الفيزيائيون في التحليل الفلكي) وبكتابة F كقوة جذب الأرض للقمر الاصطناعي، نحصل على

$$\text{P.E.} = \int_\infty^{R_s} F\,dr = \int_\infty^{R_s} \frac{GMm}{r^2}\,dr = GMm \times \int_\infty^{R_s} \frac{dr}{r^2} = GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^{R_s} = -\frac{GMm}{R_s}.$$

وطاقة الحركة K.E. للقمر هي:

$$K.E. = \frac{1}{2} m v^2,$$

حيث v هي السرعة المدارية. كما بينا سابقا،

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_s}}.$$

وبذلك

$$\boxed{v^2 = \frac{GM}{R_s}.}$$

وبذلك،

$$K.E. = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R_s},$$

ومن ثم تصبح الطاقة الكلية

$$E = -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2} \frac{GMm}{R_s} = -\frac{GMm}{2R_s},$$

أو باستعمال المعادلة في الإطار السابق

$$\boxed{E = -\frac{1}{2} m v^2.}$$

والمقاومة الجوية التي تعرض لها القمر الاصطناعي هي ميكانيكية فقد الطاقة Energy-loss mechanism، ومعدل الطاقة المفقود من القمر الاصطناعي (القدرة المُبددة *Power* dissipated) معطاة vf_d (ارجع إلى ملاحظة 2 في الفصل 3). هي،

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -v f_d}$$

وضعنا الإشارة السالبة لأنّنا نعرف أنّ $vf_d > 0$ وأنّ الطاقة الكلية تتناقص. والآن من المعادلة في الإطار للطاقة الكلية

$$v^2 = -2\frac{E}{m},$$

وبذلك يصبح التفاضل بالنسبة إلى الزمن

$$2v\frac{dv}{dt} = -\frac{2}{m}\frac{dE}{dt}.$$

أو

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{mv}\frac{dE}{dt}.$$

باستخدام المعادلة في الإطار للحد $\frac{dE}{dt}$، نحصل على

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{mv}(-vf_d) = \frac{f_d}{m},$$

الذي يبين أنّ معدل التغير في سرعة القمرالاصطناعي المدارية يتناسب طرديا مع قوة المقاومة. وبما أنّ كل من f_d و m موجب، إذاً $\frac{dv}{dt}>0$، وتزداد السرعة المدارية باستمرار على الرغم من أنّ قوة المقاومة تستنزف الطاقة من القمر الاصطناعي باستمرار.

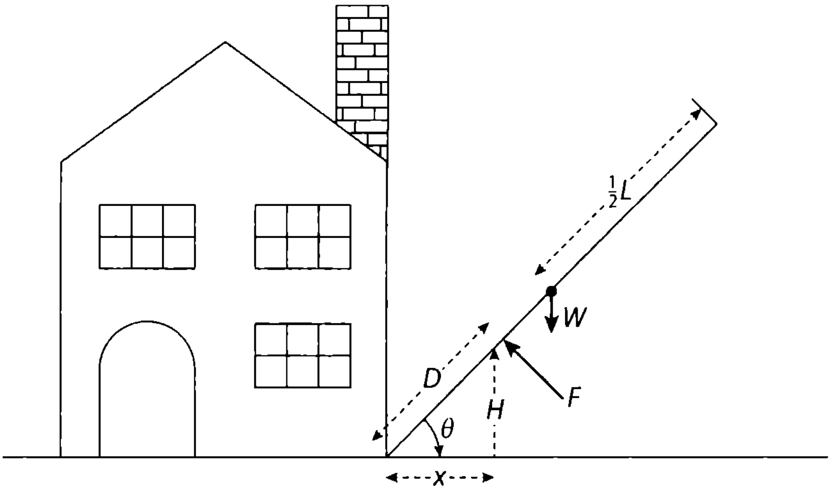
13 صعود السلم عموديا

"وَرَأَى حُلْمًا، وَإِذَا سُلَّمٌ مَنْصُوبَةٌ عَلَى الأَرْضِ وَرَأْسُهَا يَمَسُّ السَّمَاءَ،
هي ذا مَلاَئِكَةُ اللهِ تعرج إليها وتنزل من عليها"
- سفر التكوين 28:12

في الإنجيـل Bible، حَلَمَ يعقـوب فقـط بسـلم طويـل بشـكل هائـل يصـل بيـن الأرض والسـماء تسـتطيع الملائكـة الانتقـال صعـودا ونـزولا بيـن هذيـن المكانيـن (إذاً لمـاذا الأجنحـة؟ هـو سـؤال يفـوق قـدرة الفيزيـاء للإجابـة عنـه). ولكـن في الواقـع نصـب سـلم أقصـر بكثيـر ليس مهمة سـهلة، كمـا يبيـن التحليـل التالـي.

مشكلة يواجهها واقعيا كل صاحب منزل في نهايـة المطـاف وهـي رفـع سـلم للوصـول إلى سـطح المنـزل حتـى ولـو كان لاسـترداد قطـة الأسـرة، أو لإزالـة الطيـور الميّتـة مـن المدخنـة، أو لتنظيـف المزاريـب. سـلم السـطح هـو جسـم مُرهـق ونحيـل وهـو سـلّم طويـل (20 أو 30 قـدم) وثقيـل، ربمـا يـزن 50 رطـلاً أو أكثـر. إذا تخيلنـا مثـل هذا السـلم موضوعـاً عـلى الأرض، كيف نقيمه رأسيا من دون أن نفقد السيطرة عليه و إلحاق الضرر بأنفسنا أو إتلاف الأشياء القريبة؟ إذا كان لدى عالم الرياضيات جي. إتش. هاردي G. H. Hardy (انظر: ملاحظة 13 في المقدمة) أي سبب للتفكيـر في مشكلة رفـع السـلّم للصعـود إلى السـطح -أنـا مسـتعد للمراهنـة أنّه لم تنشـأ الحاجة إلى مثـل ذلـك في حيـاة هـاردي الهادئة! - أعتقد أنّه سـيعيد التفكير في ملاحظته بخصوص قيمة الفيزيـاء في حيـاة الرجـل العـادي.

وطريقة واحدة (اسـتخدمتها لمرّات عديدة) هي أولاً سـحب السـلّم إلى المنزل ووضع نهايته بالقـرب مـن الحائـط ليكـون السـلم بزاويـة قائمـة بالنسـبة إلى المنـزل. وبعدهـا الذهـاب إلى الجهـة البعيـدة مـن السـلم، وتمسـك بـه لترفعه وأنت "تمشـي باتجاه المنزل". بسـيط جـدا، أليس كذلك؟



رسم توضيحي 13.1 هندسة رفع السلم

حسنا، هذه التقنية الحميدة ظاهريا لها مفاجآت مخفية لأي شخص يؤدي ذلك للمرة الأولى، وستكتشفها فور تطبيقنا لبعض الفيزياء البسيطة. [1]

يبين الشكل 13.1 سلم بطول L على زاوية θ من الأرض. وعندما يكون السلم مستلقيا على الأرض تكون $\theta = 0°$ وعند رفع السلم قائما تكون $\theta = 90°$ ($\frac{\pi}{2}$ راديان). والشخص الذي يصعد السلم يكون على مسافة x من قاعدة السلم ويبذل قوة F (عمودية) على السلم على ارتفاع ثابت H فوق الأرض (H هو ارتفاع كتف الشخص). وهذه القوة تبعد مسافة D من قاعدة السلم كما تُقاس على طول السلم.

إذا تخيلنا أنّ الشخص الذي يرفع السلم بتقليل x تدريجيا ("السير بالسلم باتجاه المنزل")، ستكون الحالة الموضحة في الشكل 13.1 موضع توازن Equilibrium Position إذا كانت نزعة دوران وزن السلم باتجاه عقارب الساعة متوازنة مع نزعة دوران القوة F المبذولة باتجاه عكس عقارب الساعة. بفرض أنّ للسلم وزناً يساوي W موزعاً بشكل منتظم على طوله، وموجهاً نحو الأسفل مباشرة من النقطة $\frac{1}{2}L$ على طول السلم، وإذن سيكون مركب الوزن W العمودي على السلم $W\cos(\theta)$، وبذلك يكون عزم الدوران Torque الذي باتجاه عقارب الساعة $\frac{1}{2}WL\cos(\theta)$. وبما أنّ عزم الدوران الذي باتجاه حركة عقارب الساعة هو FD، نحصل على (لتحقيق التوازن):

$$FD = \frac{1}{2}WL\cos(\theta).$$

وبذلك،

$$F = \frac{WL\cos(\theta)}{2D}.$$

أو، بما أنّ

$$H = D\sin(\theta).$$

من ثم

$$D = \frac{H}{\sin(\theta)}.$$

ونصل إلى

$$F = \frac{WL\sin(2\theta)}{4H}.$$

وبما أنّ لدينا الهوية المثلثية Trigonometric identity
$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

من ثم

$$F = \frac{WL\sin(2\theta)}{4H}.$$

هناك قدر كبير من المعلومات في النتيجة الأخيرة. تذكّر، المتغير الوحيد هو θ، L، W، و H ثوابت. لذا، قبل كل شي، بما أنّ $\sin(2\theta)$ هي دالة تنمو باستمرار كلما تفاوتت 2θ ما بين 0° و 90°، نرى أنّ F ستكون دائما في أقصى قيمة عند $\theta = 45^\circ$ لكل L، W، و H والقوة القصوى[2] هي:

$$F_{\max} = \frac{WL}{4H}.$$

إذا، على سبيل المثال، كان طول السلم 30 قدماً ويزن 50 رطلاً، إذا يتعين على الشخص الذي يبلغ طول كتفه 5 أقدام أن يبذل قوة

$$\frac{(30)(50)}{4(5)} \text{رطل} = 75 \text{ رطلاً}$$

وعندما يكون السلم مائلا بزاوية 45° (أي أنّ الشخص على بُعد مسافة $x = H = 5$ قدم من قاعدة السلم). فهذه القوة أكبر من وزن السلم، نتيجة دائما تكون مفاجئة.

وكان على هاوي الراديو الذي ذكرته سابقا أن يقيم برجاً هوائياً بطول 60 قدماً ويزن 120 رطلاً، ويبلغ ارتفاع كتفه 5 أقدام، بأن يبذل قوة قصوى ($\theta = 45^\circ$، وبذلك مع 5 أقدام من قاعدة البرج)

$$\frac{(60)(120)}{4(5)} \text{رطل} = 360 \text{ رطلاً}$$

ثلاثة أضعاف وزن البرج.

وتمرين مسل آخر هو حساب القوة المطلوبة كدالة لبُعد الشخص من قاعدة السلم، أي، F كدالة لـ x. نحصل على

$$\tan(\theta) = \frac{H}{x},$$

وبذلك

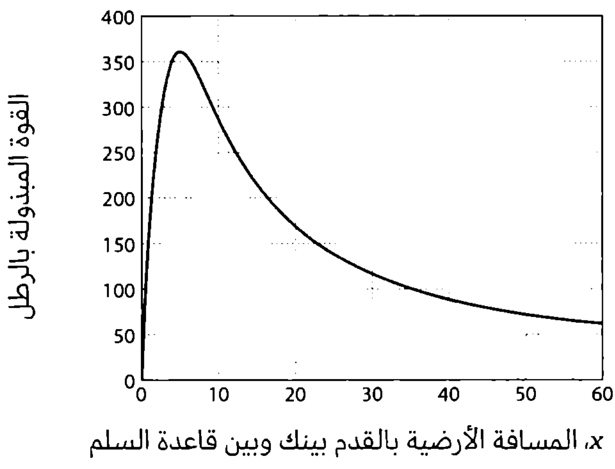
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{H}{x}\right).$$

من ثم،

$$F = \frac{WL \sin\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{H}{x}\right)\right\}}{4H}, \quad 0 \le x \le L.$$

للقيم المعطاة L ،W، و H من السهل رسم F بينما تتغير x، ويبين شكل 13.2 نتيجة إقامة هاوي الراديو للبرج الهوائي الخاص فيه ($H = 5$ أقدام، $L = 60$ قدم، و$W = 120$ رطل)

وعندما كتب هاوي الراديو في نهاية ورقته، أنّ المفاجأة الحقيقية في هذه المسألة أصبحت الآن واضحة في الشكل 13.2: "هذا المنحنى يبين أنّ القوة القصوى تظهر بعد أن تسير مسافة [55 قدم]! في هذه النقطة، إذا صار الحمل لا يُطاق، ستواجهك مسافة طويلة للعودة إذا قررت أنك لا تستطيع تحمل وزن البرج. وهنا تحدث أغلب الحوادث. وحتى لو كنت قادرا على حمل 360 رطلاً، عليك أن تتذكر أنك قد مشيت مسافة طويلة ساندا أكثر من 100 رطل". وهذا التنبيه مهم لكل أصحاب المنازل ليضعونه في اعتبارهم عند التفكير في الذهاب إلى سطح منزلهم.



رسم توضيحي 13.2 إقامة برج بارتفاع 60 قدماً وبوزن 120 رطلاً

ملاحظات

1. جاء هذا المثال نتيجة التحفّز بعد قراءة ما يواجهه هاوي الراديو عند إقامة برج هوائي كان طوله 60 قدماً ويزن 120 رطلاً، انظر: P. B. Mathewson, "Walking Your Tower Up? Can You Do It Safely?" *QST*, March 1980, pp. 32–33. وبعدها بثلاث سنوات، في سبتمبر 1983، توصلت مقالة إلى النتائج نفسها التي ظهرت في مجلة مدرس الفيزياء *The Physics Teacher* ("Practical Mechanics: Raising a Mast," pp. 379–380) by Robert L. Neman.
2. وفي ورقة تكرر نتائج الورقة الأولى في *QST*، قدّم نيمان Neman (انظر: ملاحظة 1) تعقيد غير مطلوب بغياب التبسيط المثلثي المُستخدم هنا، تحديدا $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$. وبدلا من ذلك، يجد القوة القصوى بعد إجراء عملية تفاضل. وقد لاحظ قارئ من الدنمارك لمجلة مدرس الفيزياء *Physics Teacher* (September 1984, p. 350)، "أنّ الاشتقاق المستخدم [استخدمهُ نيمان] والطويل إلى حد ما... غير ضروري"يجب الإبقاء على بساطة المسألة الفيزيائية البسيطة، وهذا مثال آخر جيد لمغزى القصة التي ربطتها بخصوص أديسون والرياضيات في نهاية الفصل 1: "لا تستعمل مدفعا (الحسبان) عندما يمكن للبندقية الهوائية (حساب المثلثات للمرحلة الثانوية) أن تؤدي المهمة".

14 لماذا السماء مظلمة في الليل؟

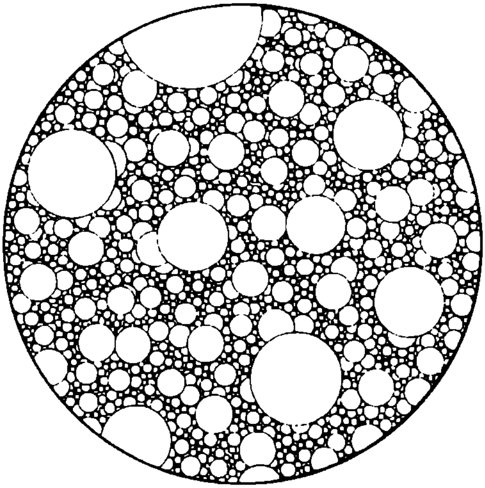
"لا توجد مفارقات في العلوم".

اللورد كالفِن، محاضرات بالتيمور[1] *Lord Kelvin*, The Baltimore Lectures[1]

يتناول هذا الفصل موضوعا يوضح كيف أنّ ما قد يبدو من بين أكثر الملاحظات الحميدة والشائعة، بل بل عادية، هي في الواقع من بين الأسئلة الأكثر عمقا التي سألها الفيزيائيون من أي وقت مضى. لذا، دعونا ندخل في صلب الموضوع مع السؤال منذ قرون، وقد يبدو في البداية سخيفا (أو على الأقل، ميتافيزيقياً غيبياً): لماذا السماء الليلية مظلمة؟ (جرّب ذلك على صديق، حتى على المتمرس في العلم، ولا تتفاجأ لسماع الجواب، "بالطبع هي مظلمة، يا أبله، إنه الليل!") لقد تطلب الأمر عبقريا لتقدير أنّه ليس سؤالا سخيفا.[2]

وعلى الرغم من كل شيء، فإذا كان الفضاء لا نهائياً، ويحتوي على عدد لانهائي من النجوم المنتشرة بشكل منتظم، إذا في كل خط نظر بينما تنظر إلى الفضاء سيتقاطع في نهاية المطاف مع سطح نجم (في الواقع، نظرية الاحتمال Probability Theory تتطلب ذلك، كما سأجادل بعد قليل)، كما هو مبين في الشكل 14.1. لا يجب على سماء الليل أن تكون مظلمة بتاتا، ولكن بدلا من ذلك، مشرقة لدرجة تخطف الأبصار. ولكنها ليست مشرقة. لِمَ لا؟

وطريقة سهلة للخروج كم مأزق من اللغز قد تبدو ببساطة انكار أنّ الفضاء (وعدد النجوم التي فيه) لانهائي. ولكن ذلك سيكون تنازلا. يتجنب الفضاء اللامتناهي السؤال المحرج ما "وراء" نهاية الكون المحدود. اللاهوتيون المبكرون، تحديدا، أحبُّوا فكرة الفضاء اللامحدود لأنها تجنّبت مسألة وضع حدود على قدرات الرب، وجعلوا الزمن لامحدودا أيضا، لتجنب السؤال المحرج بالتساوي ماذا كان يفعل الرب قبل خلق كل شيء في زمن محدود مضى.

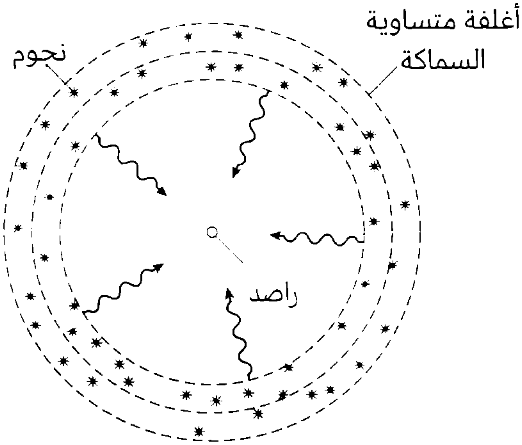


رسم توضيحي 14.1 نجمة، أين ما رأيت

(وأجيب عن ذلك بفطنة بالعبارة الشهيرة : "خلق الجحيم لكل من يسأل"). أما اللاهوتيون المعاصرون، بعضهم يحمل شهادات دكتوراه في الفيزياء النظرية، أكثر رقيا بخصوص هذه الأسئلة.

لنفترض أنّ كل النجوم اللانهائيَة هي بدرجة إشراق شمسنا التي، حتى مع درجة حرارة السطح البالغة 11,000 فهرنهايت، هي نجم عادي. وعلى السماء في الليل أن تكون شديدة الإشراق بسبب حجة هندسية بسيطة جدا، مبنية على الشكل 14.2. في الحقيقة، بالحجة التي سأريك إياها، يجب أن تكون سماء الليل مشرقة لانهائيا، ويجب أن يفيض الفضاء كله بمستوى إشعاع يمكن أن يبخّر الأرض لحظيا وكل من عليها (بما في ذلك نحن).

تخيل نفسك الراصد في الشكل 14.2، محاط بفضاء لامتناهٍ، فضاء يحتوي على نجوم عديدة منتشرة بانتظام ولامتناهية. وافرض أنّ هذا الفضاء مقسم إلى أغلفة كروية متحدة المركز (يبين الشكل اثنين منهم)، وكل غلاف لديه العمق نفسه (سماكة) ΔR. وحجم الغلاف الذي يبعد مسافة R عن الراصد تقريبا $4\pi R^2\Delta R$ (تقريب ممتاز للسماكة $\Delta R << R$)، وهذا الحجم قياس مباشر لعدد النجوم (العلامات النجمية في الشكل 14.2) في الغلاف. وشدة الضوء الذي تراه من النجمة الوحيدة من مسافة R تتغير بنسبة $\frac{1}{R^2}$ ، وبذلك تكون شدة الضوء الذي تراه من جميع النجوم في الغلاف على مسافة R تختلف كالصيغة التالية $(4\pi R^2 \Delta R)\,\frac{1}{R^2} = 4\pi\,\Delta R$. ولكن هذه القيمة ثابتة. أي أنّ شدة الضوء من غلاف غير مرتبطة ببُعد الغلاف عن الراصد وتعتمد فقط على سماكتها. لذا، بما أنّ هناك عدداً لانهائياً من الأغلفة، يجب أنّ "يرى" الراصد شدة ضوء لانهائية.[3] حسنا، نحن لانرى شيئا كهذا حتى من بُعد، ولذلك يبدو أنّ لدينا مفارقة Paradox. ولكن اللورد كالفِن Lord Kelvin أنكر حدوث شيء من هذا القبيل، ولذا لا بد من وجود حل. سأتركك تفكر في هذه المسألة لبعض الوقت وبعدها أخبرك بالمزيد في نهاية الفصل.



الرسم التوضيحي 14.2 غلافان كرويان من النجوم

لرؤية ارتباط الاحتمال الذي ذكرته سابقا وراء سؤال سماء الليل، تخيّل نظام الإحداثيات السيني والصادي المعتاد x, y- Coordinate System. إذا رسمنا عشوائيا خطاً مستقيماً في قطاع النصف الأسفل من الربع الأول من هذا النظام (سيصنع الخط زاوية قطبية Polar angle مع المحور السيني x بين $0 < \theta < 45°$)، ابتداء من المركز وامتدادا إلى مالانهاية، ماهو احتمال أن يمر الخط عبر على الأقل نقطة شبكية عدا عن المركز؟ (النقطة الشبكية Lattice Point هي نقطة ذات إحداثيات صحيحة، وبذلك (3،7) هي نقطة شبكية، ولكن $(\pi, \sqrt{2})$ ليست كذلك). ولهذا السؤال، تعريف الخط والنقطة هو رياضياتي بحت. أي، ليس للنقطة حجم (امتداد) في أي اتجاه، وسماكة الخط صفر. لذلك، مرة أخرى، ما هو احتمال أن يعبر الخط على الأقل نقطة واحدة بخلاف المركز؟

الاحتمال يساوي صفر.[4] إليك السبب. وإذا عبر الخط نقطة على الشبكة (x_k, y_k)، من ثم، يصنع الخط زاوية θ مع المحور السيني x، و$\tan(\theta) = \frac{x_k}{y_k}$، وهو رقم جذري في الفترة 0 إلى 1. ولكن الأرقام الجذرية هي مالانهايات معدودة (أي يمكن وضعها مقابل أرقام موجبة صحيحة للتوافق)، في حين أنّ كل القيم المحتملة للدالة $\tan(\theta)$ هي الأرقام الحقيقية في الفترة 0 إلى 1، وهي مالانهايات لاتُحصى معدودة[5] ولكن من المهم ملاحظة ذلك، أنّه إذا رسمنا حول كل نقطة على الشبكة دائرة بنصف قطر ε (فكّر بالمقاطع العرضية الدائرية للنجوم في مسألة سماء الليل)، ومن ثم احتمال عبور الخط المرسوم عشوائيا خلال عدد لامحدود من الدوائر هو 1 بغض النظر عن صغر ε، لطالما $\varepsilon > 0$. (برهنته ليست بسيطة!)

هذه الصورة تبدو أنها المفتاح لتجنب استنتاج "الشدة اللامتناهية" Infinite intensit. للأسف، كما سترى، سننجح فقط في تقليل سطوع سماء الليل من اللانهاية إلى "فقط" لسطح النجم! وهذا حقا انخفاض كبير، نعم، ولكنه ليس كافيا لإنقاذنا من الاحتراق في الفرن الكوني. وبدلا من التحول إلى خبز محمّص خلال 10^{-30} ثانية، سيستغرق الآن تريليون مرة أطول، أو

10^{-18} ثوانٍ. وعلى الرغم من أنّ هذه الفترة مازالت في الجانب الأقصر، فإنه يوجد بعض الارتياح ذو قيمة لنا. ومع ذلك، لنرى أولا كيف نذهب من ∞ فهرنهايت إلى 11،000 فهرنهايت. أنه أمر بسيط جدا: الفكرة مبنية على تحفيز ما يُسمى مسافة المراقبة Lookout Distance. (سأريك لاحقا في هذا الفصل كيف تحسب هذه المسافة). هذا امتداد خط الرؤية حتى يتقاطع مع سطح نجم. وهذه النجمة تحجب كل النجوم التي خلفها، وبذلك لا تتلقى إشعاعا من عدد النجوم اللانهائية.

ولكن حتى من دون أي تعبير كئيب على ذلك ذلك، مازال 11،000 فهرنهايت حارا جدا.

وفي الواقع، فكرة "الحجب" لاتعمل أيضا، فقد أيدها كل من أولبيرس Olbers وشيسو Chéseaux، ولكنهما كتبا قبل دخول مبدأ حفظ الطاقة Principle of the conservation of energy الفيزياءَ (أربعينات القرن 19). وهذا المبدأ هو الخطأ الذي قضى على فكرة الحجب، لأنّ أي مادة بين النجوم تمتص طاقة الضوء من النجوم الأبعد تتعرض بعدها لزيادة في درجة الحرارة وبذلك ستشع ببساطة الطاقة الممتصة باتجاهنا. وحتى لو عملت فكرة الحجب، فلن تكون ذات فائدة في أي حال. إليك السبب.

في ملاحظة بنهاية الفصل في كتابه، قدم هاريسون Harrison (ملاحظة 2) تحليلا جميلا لرياضيات ابتدائية لآثار ما قد تعني "سماء مصمتة من النجوم" Solid sky of star ، حتى ولو لم تكن هناك نجوم أخرى خلف النجوم التي نراها. لا أستطيع التفكير في أي طريقة لتطوير طريقة تقديمه وبذلك ها هي، كما كتب هاريسون: "لدى السماء مساحة زاوية تساوي 4π راديان تربيع (راديان تربيع هي وحدة لزاوية مصمتة، الستيراديان Steradian). ويساوي الراديان $180/\pi = 57.3$ درجة قوسية، وبذلك كل السماء مغطاة $4 \times 180^2/\pi = 41.253$ درجة^2. والشمس تواجه نصف قطر زاوي لنحو0.27 درجة، مقابل مساحة أكثر قليلا من 0.22 درجة^2. وتكون بذلك مساحة السماء كاملة تقريبا 180،000 مرة من الشمس. وبتعبير آخر، يشع الكون ذو السماء المشرقة على الأرض 180،000 مرة من إشعاع الشمس". هذا ليس مالانهاية، ولكنه كبير لدرجة تبخير الأرض. (وقد حُسبت هذه النتيجة لأول مرة بواسطة شيسو انظر صفحة 143: ملاحظة 3).

إذن، ما هو الجواب؟ في جزء مذهل لبحث تاريخي، تتبع هاريسون الفكرة الأساسية للجواب الحديث، من بين جميع الناس، للشاعر الأمريكي إدغر ألن بو Edgar Allen Poe (1809-1849) ! – تحديدا، لمقالته الطويلة (أكثر من 100 صفحة) يوريكا *Eureka*: قصيدة نثرية *A Prose Poem*، التي نُشرت في 1848. وكانت فكرة (بو) ببساطة أنّ الكون واسع وأنّ هناك بعدا خلف النجوم البعيدة التي لم يسعفها الوقت ليصل ضوؤها منذ ولادتها، إلى الأرض. وهذا البعد هو الأفق الذي يحدد نهاية الكون المرئي، أفق يتراجع عن الأرض بسرعة الضوء. والفكرة البسيطة هذه تفرّ فورا من كارثة سماء الليل ذات الإشراق اللانهائي ولكن، يسمح لسماء الليل لتنمو وتكون أكثر إشراقا (أشد حرارة) كلما صارت النجوم مرئية أكثر.

فكرة بو هيِ جزء من الإجابة عن سؤال سماء الليل، ولكن كان هناك كلام كثير جدا في يوريكا عن الرب لتشجيع العلماء على أخذ الموضوع جديا. وكان فيها الكثير من الحسابات لتشجيع غير العلماء على الخوض في الأرقام التي أظهرها بو أمام القارئ ليبين كم الكون واسع. تعليق من أحد القراء المحللين – إيرفنغ سترنغهام Irving Stringham (1847-1909)، أستاذ

رياضيات Professor of Mathematics في جامعة كاليفورنيا University of California في بيركلي Berkeley يعطي فكرة جيدة عن نظرة المجتمع العلمي ليوريكا: "اعتقد بو أنه كائن منقرض، عبقري كوني على أعلى مستوى، وكتب هذه المقالة ليُثبت اضطلاعه بالفلسفة والعلم... ونجح (بو) فقط بإظهار كيف يُخطئ العبقري بشكل فاضح في مجاله".[6] وبعبارة أخرى، كان يتعين على بو أن يلتزم بالشعر والقصص القصيرة، وأن يترك الفلك للفلكيين. وأعتقد أنّ هذا التقييم شديد اللهجة قليلا (فيوريكا، من وجهة نظري، هي قراءة ممتعة)، ولكنها تستعرض ردة الفعل العام للعديد من العلماء على (بو).

لم يكن (بو) الوحيد الذي فكّر أنّ حجم الكون هو مفتاح الإجابة عن لغز ظلام السماء في الليل. وقد اقترح، على سبيل المثال، الفيزيائي النظري Theoretical Physicist الأمريكي فرانك تبلر Frank Tipler أنّ الجواب عن سؤال " السماء المظلمة ليلا" قد حُلّ في 1861 من قبل الفلكي Astronomer الألماني يوهان هاينرك فون مادلر Johann Heinrich von Mädler (1794-1874). (من الواضح أنّ بو قرأ كتابات مادلر المبكّرة، فكان يشير إليه تحديدا عدة مرات في يوريكا) في الطبعة الخامسة لكتابه الفلك الجماهِيري *Popular Astronomy*، كتب مادلر "[بما أنّ] سرعة الضوء محدودة، قد مر زمن محدود من بداية الخليقة حتى يومنا، ولكن نحن يمكننا رؤية فقط الأجرام السماوية بعيدة المسافة التي انتقل عبرها الضوء خلال ذلك الوقت المحدود. وبما أنّ الخلفية المظلمة للسماء فُسّرت بشكل كافٍ بهذا الخصوص، تقدم نفسها فعلا كما هو مطلوب، والحاجة إلى افتراض [حجب] الضوء قد ألغيَت. وبدلا من القول أنّ الضوء اللآتي من البُعد [المحجوب] لا يصلنا، يجب القول: إنّه لم يصلنا بعد".[7]

كان بو ومادلر على حق، بقدر ماذهبوا، لم يذهبوا بعيدا في ما فيه الكفاية. وفي جزء آخر مثير للإعجاب من البحث الأكاديمي، كشف هاريسون عن ورقة منسية منذ مدة طويلة (التي يبدو أنها لم تستحوذ على الاهتمام حتى عندما كانت جديدة) بقلم لورد كالفِن، ونُشرت في 1901 (وأعيد كتابتها في كتاب هاريسون). وهناك نرى الجزء الأخير من الإجابة عن مسألة السماء ليلا- لا تشرق النجوم للأبد ولكن، بدلا من ذلك، لديها عمر محدد. لذلك، عندما نرى الضوء من نجم، هو لفترة محددة. كان كالفِن ذائع الصيت في العصر الفكتوري Victorian، جزئيا بسبب حسابه الشهير لعمر الشمس[8]. وتقديره (ليس أكثر من 500 مليون سنة، والأكثر احتمالا، أقل من 50 مليون سنة) مختصر جدا، لأنه لا يعلم شيئا عن التفاعلات النووية التي تزود الشمس بالطاقة.[8] تحديد الرقم ليس مهما، وإنما، أنه محدد. واليوم نعتقد أنّ عمر الشمس 5 بلايين سنة، ولديها القدر نفسه من الزمن المتبقي لتشرق. ولكن هذا المبدأ المهم هو بما أنّ 10 بلايين سنة "مدة طويل" إلا أنها منتهية، وعمل كالفِن المبكر قد جعل من ذلك حقيقة منشأة (بناء على ما أسماه "ديناميكية غير قابلة للدحض" Irrefragable dynamics) في فكره.

ولفهم ما اقترح في ورقة كالفِن في عام 1901، تخيل بهدف المجادلة أنّ فضاء لامنته، مليء بنجوم لانهائية ومنتشرة بشكل منتظم، ومحيطة بالأرض. وتخيّل في أن كل هذه النجوم كانت "مضاءة" في الوقت نفسه. الضوء من أقرب النجوم يصل "قريبا" للأرض. وسيندمج في نهاية المطاف مع الأضواء القادمة من النجوم الأبعد. ولكن بعد 10 بلايين سنة، أو نحو ذلك، ستتوقف النجوم القريبة عن الإشراق، وأنّ كرة متوسعة (مركزها الأرض) من النجوم المظلمة ستبدأ بالظهور. ومن ثم، مع ذلك، فإن الضوء الأبعد من 10 بلايين سنة ضوئية سيبدأ في الوصول

إلى الأرض لتحل محل الضوء المفقود من النجوم التي انطفأت. وبهذه الطريقة، الضوء الكلي الواصل إلى الأرض سيصل إلى حالة مستقرة من التوازن Steady-State Equilibrium لضوء النجوم الكلي في الليل. كيف تكون حالة توازن إشراق السماء ليلا؟ ليس مشرقا البتة، استنادا إلى كالفِن، إليك الكيفية التي حسب بها ذلك الإشراق، باستخدام الهندسة فقط، وقليل من الجبر، وتكامل سهل.

لنفترض أن كل النجوم بالحجم نفسه، مع نصف قطر a، وأنها منتشرة عشوائيا (على نحو منتظم) عبر الفضاء مع معدل كثافة n نجوم لكل وحدة حجم. ومن ثم نفترض أنها متمركزة حول الأرض، وننشئ غلافا كرويا بنصف قطر q وسماكة dq. وعدد النجوم في هذا الغلاف يساوي حجم الغلاف مضروبا في n، أي $4\pi q^2\, dq\, n$. والمساحة الكلية لسطح الغلاف المغطى بمساحات القطاعات العرضية لهذه النجوم تعادل

$$(\pi a^2)(4\pi q^2 dq\, n) = 4\pi^2 n a^2 q^2\, dq.$$

بقسمة هذه المساحة المغطاة على المساحة الكلية للغلاف نحصل على الجزء f من السماء الأكثر بُعدا والمحجوبة عن الرؤية بسبب النجوم التي في الغلاف:

$$f = \frac{4\pi^2 n a^2 q^2 dq}{4\pi q^2} = \pi n a^2\, dq\,.$$

نكتب $\sigma = \pi a^2$ على أنها المساحة المقطعية لنجم، وبذلك

$$f = n\sigma\ dq$$

وإذا تركنا q تتغير من 0 إلى قيمة ما r، إذاً الجزء الكليِ للسماء المحجوبة عن الرؤية من قِبل كل الأغلفة الموجودة داخل كرة بنصف قطر r هي:

$$\int_0^r f\, dq = \int_0^r n\sigma\, dq = n\sigma r = \frac{r}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{1}{n\sigma}.$$

حيث λ هي مسافة المراقبة المذكورة سابقا. في هذه الحسابات لم أضع في الاعتبار كسوف النجوم البعيدة بفعل النجوم القريبة (مثل ما اعترف كالفِن على وجه الخصوص) وادّعى أنّ مثل حدث الإخفاء هذا يكون "نادرا جدا".

ولتقييم λ، نحتاج أن نعرف n. بفرض وجود عدد N من النجوم في كرة بنصف قطر r. حينها،

$$n=\frac{N}{\frac{4}{3}\pi r^{3}}=\frac{3N}{4\pi r^{3}},$$

وإذاً،

$$n\sigma r=\left(\frac{3N}{4\pi r^{3}}\right)\left(\pi a^{2}\right)r=\frac{3N}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^{2}.$$

جزء السماء الذي يُغطيه عدد N من النجوم. فعندما كتب كالفِن مقالته كانت يعتنق النظرة العامة السائدة في مطلع القرن العشرين: أنّ مجرة درب اللبانة Milky Way Galaxy، وحدها، كانت الكون. ولكن بعد وفاته تطورت النظرة الحديثة للكون مع 10^{11} مجرة، ولكل منها 10^{11} نجم (لمجموع 10^{22} نجم!). اعتقد كالفِن أن هناك فقط مجرة اللبانة بـ 10^{9} من النجوم، وجميعها محتواة في كرة بنصف قطر 3.09×10^{16} كيلومتر (3،300 سنة ضوئية)، تعطي سماكة تساوي

$$n=\frac{3\times10^{9}}{4\pi\left(3.3\times10^{3}\right)^{3}}$$ نجم/سنة ضوئية تكعيب

= 0.0066 نجم/سنة ضوئية تكعيب

وهذا نجم واحد لكل 150 سنة ضوئية تكعيب، في المعدل.

في النظرة الأولى قد تبدو كثافة التوزيع هذه كثافة ضئيلة، ولكن نظرة ثانية قد تعطيك سببا لإعادة التفكير. وهذه الكثافة تكافئ 10 نجوم منثورة عشوائيا عبر 1,500 سنة ضوئية مكعبة أو، بعبارة أخرى، خلال داخلية كرة نصف قطرها 7.1 سنة ضوئية. والآن، طريقة حدسية مرضية لحساب "مدى قرب" هذه النجوم من بعضها هي في النظر إلى معدل القيمة لمسافة أقرب جار. أي أنّ لكل 10 نجوم، كم يبعد أقرب نجم في المتوسط؟ (لاحظ، بحذر، أنّ دالة الجار الأقرب ليست متبادلة. أي أنّ، إذا كان أقرب جار للنجم A هو B، فليس بالضرورة أن يكون A أقرب جار للنجم B). وهذه مسألة في الاحتمال الإحصائي، التي يمكن حلها تحديدا إذا كان لدى الشخص معرفة بالرياضيات أكثر مما أفترض هنا، ولذلك سأخبرك الإجابة ببساطة:[9] إذا عينا أحد النجوم مركزا لكرة نصف قطرها r، ونثرنا النجوم التسعة الأخرى بعشوائية في أرجاء الكرة، إذا متوسط أقرب مسافة هي $0.4191r$ (= 3 سنوات ضوئية لنصف قطر r = 7.1 سنة ضوئية). للمقارنة أقرب جار نجمي للشمس هو القزم الأحمر بروكسيما سينتوري Proxima Centauri، جزء من نظام النجم الثلاثي ألفا سنتوري Alpha Centauri Triple Star System، ويبعد 4.3 سنة ضوئية.

والآن، نصف قطر الشمس يساوي 7×10^{5} كيلومتر أو، بالتحويل لسنوات ضوئية (باستخدام 3×10^{8} متر/ثانية كسرعة الضوء)،

$$a = \frac{7 \times 10^8 \text{ meters}}{3 \times 10^8 \frac{\text{meters}}{\text{second}} \times 3,600 \frac{\text{seconds}}{\text{hour}} \times 24 \frac{\text{hours}}{\text{day}} \times 365 \frac{\text{days}}{\text{year}}}$$

= 7.4 x 10^{-8} سنة ضوئية

وإذا كانت مساحة الشمس المقطعية هي

σ = π (7.4 × 10^{-8})^2 سنة ضوئية تربيع

=172 x 10^{-16} سنة ضوئية تربيع

التي تعطي مسافة مراقبة في كون كالفِن

$$\lambda = \frac{1}{(0.0066)\left(172 \times 10^{-16}\right)}$$ سنة ضوئية = 8.8 x 10^{15} سنة ضوئية

وبعبارة أخرى، عندما تنظر خارجا إلى السماء ليلا لفضاء كالفِن المفترض، يجب أن يمتد خط رؤيتك إلى نحو 9 كوادريليون سنة ضوئية ليصل إلى سطح نجم. وبشكل أكثر دراماتيكية (إذا كان ذلك ممكنا)، سترى ضوءا غادَر نجما قبل 9 كوادريليون سنة مضت - ولكن الكون ليس بهذا القدم، لذلك أنت في الحقيقة لا ترى شيئا، والسماء ليلا هي (في المعدل) مظلمة.

للتوصل حقا إلى الاستنتاج، إذا قيمنا تعبير كالفِن لجزء السماء المغطى بعدد N من النجوم ($n\sigma r$) نحصل على

$$n\sigma r = \frac{3N}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{3 \times 10^9}{4}\left(\frac{7.4 \times 10^{-8}}{3.3 \times 10^3}\right)^2 = 3.8 \times 10^{-13},$$

التي في الحقيقة صغيرة جدا! ويمكن للشخص، أن يلعب بقيم N و r –واليوم نعتقد أنّ N يجب أن تكون أكبر بكثير من 10^9، ولكننا أيضا نعتقد أنّ r يجب أن تكون أكبر بكثير من 3,300 سنة ضوئية- مع أنه يبدو أنّ النتيجة النهائية لا تراعي لعبة الأرقام مثل هذه. وكما ختم كالفِن بنفسه:" يبدو أنّه لا توجد إمكانية للحصول على نجوم كافية... لعمل مساحة كلية لقرص نجمي أكثر من 10^{-12} أو 10^{-11} لكامل السماء". لذا، في المرة القادمة التي تقترب فيها منك نصفك الآخر وتعلق على مدى رومانسية ظلام السماء ليلا مع نجومها المبعثرة، يمكنك الآن الرد: "هل تعلمين لماذا غالبيتها مظلمة؟ وأنه ليست هناك نجوم في كل مكان؟ دعيني أخبرك القصة وراء ذلك إنّ ذلك كله بسبب..".

ولترى إذا كان سيزيد إعجابها بك!

ملاحظات

1. محاضرات بالتيمور *The Baltimore Lectures* هي تسجيل اختزالي لسلسلة محاضرات ألقاها الأستاذ الأسكوتلندي ويليام تومسون Professor William Thomson (1824-1907)، وتسمى أيضا لورد كالفِن Lord Kelvin، في أكتوبر 1884 في جامعة جون هوبكنزJohn Hopkins University.
2. يُناقش السؤال غالبا (وبشكل خاطئ) تحت مسمى مفارقة أولبيرس *Olbers' Paradox*، نسبة إلى الفلكي الألماني هاينرك ويلهيلم أولبيرس Heinrich Wilhelm Olbers (1758-1840)، الذي كتب عنه في 1823. في الحقيقة، أنها يجب أن تنسب إلى كيبلر Kepler (انظر: الفصل 5) الذي طرحها قبل أكثر من قرنين (!) سابقا، في 1610. ولكن لم تظهر مطبوعة حتى ناقشها صديق نيوتن Newton إدموند هالي Edmund Halley (1656 – 1742) (للأسف بصورة خاطئة) في ورقة عام 1772 (وقد أشارت ورقة أولبيرس إلى خطأ هالي). وتاريخ مدهش لسؤال السماء المظلمة ليلا وضعه إدوارد هاريسونEdward Harrison، الظلام في الليل *Darkness at Night*، مطبعة جامعة هارفرد Harvard University Press، 1987، التي أعادت إنتاج ورقتي هالي وأولبيرس.
3. هذه الحجة جاءت من قبل للفلكي السويسري جان فيليب لويس دو شيسو Jean-Philippe Loys de Chéseaux (1718 -1751)، الذي قدمها كملحق لكتاب عن المذنبات (!) لسنة 1744، التي ربما كان السبب لعدم معرفته حتى يبعد سنوات لاحقة. وهذا الملحق قد أعيدت طباعته بواسطة هاريسون في كتابه (ملاحظة 2). ويمكن إيجاد وميض خافت لحجة الغلاف في كتاب هالي.
4. لا يعني الاحتمال صفر أنّ تقاطع خط مع نقطة شبكة Lattice point مستحيلا، فيمكنك جليا أن ترسم خطوطا لا تحصى. هناك فقط "مالانهاية أكبر" لخطوط لايمر أحدها عبر حتى نقطة شبكة واحدة. وحدث مستحيل بالتأكيد لديه احتمال 0، ولكن الحوار غير صحيح.
5. يمكنك العثور على براهين بمستوى المرحلة الثانوية لهذه العبارات في كتابي *The Logician and the Engineer*, Princeton University Press, 2013, pp. 168–173.
6. مقتبسة من أعمال إدغار آلان بو: *The Works of Edgar Allen Poe in Ten Volumes*.E (vol. 9),C. Stedman and G. E. Woodbury (eds)., The Colonial Company, 1903, p. 312.
7. مقتبسة من Frank J. Tipler, "Johann Mädler's Resolution of Olbers'Paradox," *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, September 1988, pp. 313–325.
8. جميع النجوم بما في ذلك الشمس، تستمد طاقتها من تفاعلات الاندماج النووي التي تحدث عميقا في باطنها. وبما أنّ معرفة هذه التفاعلات جاءت بعد كالفِن Kelvin (بالتأكيد، بعد وفاته)، كان عليه أن يجد آلية لمصدر الطاقة النجمية. والمرشح الوحيد المحتمَل في يومه كان تقلص الجاذبية *Gravitational Contraction* لسحب الغاز النجمي Interstellar gas clouds. وأثناء التقلص تتحول الطاقة الكامنة للسحابة الغازية المنهارة إلى الطاقة الحركية

المتزايدة لجزيئات الغاز، وبذلك تزيد حرارة الغاز إلى إشعاع. ومن المثيرة للسخرية أننا نحن نعتقد اليوم أنّ تقلّص الجاذبية هي بالفعل ما يبدأ التكوّن النجمي، برفع درجة حرارة السحابة الغازية المنهارة لدرجة يمكن لتفاعلات الاندماج أن تبدأ، وبذلك تمنع الانهيار. وبهذا، لم يكن كالفِن على خطأ تماما. ويمكنك النظر إلى بعض الحسابات المفصلة عن ما أنجزه كالفِن في كتابي *Mrs. Perkins's* (note 8), pp. 285–298, 365–366..

9. يمكنك العثور على تحليل كامل في كتابي السيدة بيركنس *Mrs. Perkins's* (ملاحظة 8)، صفحات 285-365،298-366.

15 كيف تطفو بعض الأشياء (أو لا تطفو)

"يطفو الحديد على الماء
سهلا كما قارب خشبي".
نبوءة نُسبت إلى الأم شيبتون *Mother Shipton*، ساحرة إنجليزية
(وفقا للأسطورة) التي عاشت في يوركشاير *Yorkshire* بالقرن السابع عشر

لبدء هذا الفصل بملحوظة أقل علمية إلى حد ما، تأمّل بالحكاية القصيرة التالية.

بوب سارق البنوك Bob Bankrobber، المجرم الرئيسي، قد أمسك به مؤخرا زعيمه في عالم المجرمين Gangland Boss وهو يزور المال من سرقات البنوك قبل تسليم الغنائم.

ولهذا السبب هو يقف الآن في قارب عائم في وسط بحيرة كبيرة، وقدماه غائصتان إلى الكاحلين في دلو كبير من الإسمنت الذي يتصلب. مع اثنين من زملائه المجرمين الذين سيصبحون قريبا من الماضي، فريد مُشعل النار Fred Firebug وتوم السفاح Tom Thug، فلديهم أوامر من الزعيم برمي بوب من على القارب. وقبل أن يفعلوا ذلك، يقول فريد لتوم: "اسمع، توم، قبل أن أتعلّم كيف أشعل الحرائق كنت أدرس الفيزياء في جامعة الولاية، وهذا يذكرني بأحد مسائل الواجبات المنزلية ذات مرة. بعد أن نرمي بوب، ويغرق إلى الأسفل، هل سيرتفع مستوى المياه في البحيرة أم ينخفض؟"

وتوم، الذي رسب في تخصص دراسات الترفيه القصوى بجامعة الولاية، فكر في ذلك مليا وصار بعدها محتارا. وبعد كل ذلك، عندما يدخل بوب إلى البحيرة سيزيح بعض الماء الذي يجب أن يسبب ارتفاعا في منسوب الماء. وعلى الرغم من ذلك، حالما يترك بوب القارب؛ سيرتفع القارب أعلى ويزيح ماء أقل؛ مما يسبب انخفاض منسوب الماء. أي تأثير سيغلب؟

ربما لا يكون توم ذكيا بما يكفي لسفاح، لكنه صريح وبذلك أجاب: "لا أعلم يا فريد". غير أن توم ليس غبيا تماما ويفكر في فكرة جيدة. "لنقِش مستوى سطح البحيرة قبل أن نرمي بوب وبعد أن نرميه". وبعدها أخرج قطعة طباشير من جيب بنطاله ووضع علامة على عمود قائم صادف أن يكون بالقرب من القارب قد برز من البحيرة ونهايته مدفونة في قاع البحيرة. "انظر، فريد"، يقول توم، "كل ما علينا فعله هو مراقبة مستوى الماء بعد أن نرمي بوب إذا صار فوق أو تحت خط الطباشير". وفهم فريد المنطق وراء ذلك، واتفق أنّ فكرة توم منطقية. وعلى الرغم من المأزق، حتى بوب (الذي كان متخصصا بالرياضيات في جامعة الولاية قبل أن يخضع لإغراءات الشر في الجانب

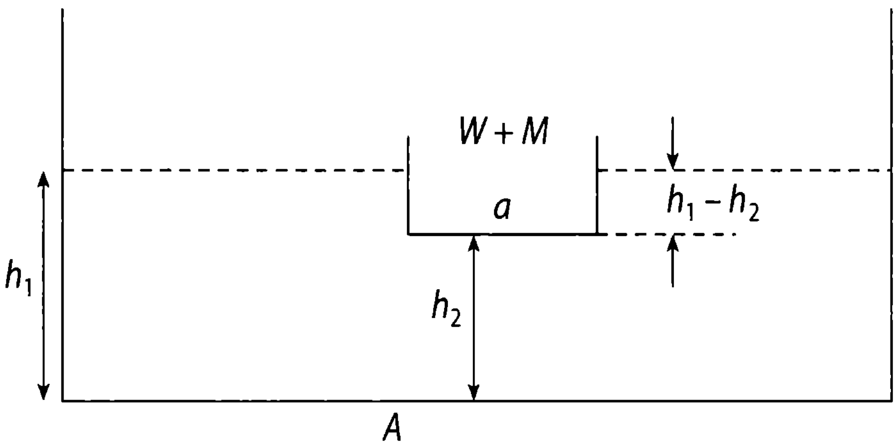
المظلم) وجد السؤال مثيرا للاهتمام بشكل استفزازي وكان على وشك أن يضيف أفكاره عندما رُمي به من على حافة القارب، وبذا فإن ما كان سيضيف إلى النقاش قد فقد من التاريخ إلى الأبد.

لذلك، فلننس بوب ولنركز على سؤال فريد: هل سيرتفع منسوب الماء أم سينخفض (أو ربما، لن يتغير)؟

أو، تأمل بهذه الفكرة البديلة: توم وفريد مترددان في "القضاء" على صديقهم القديم بوب، وقررا أن يمنحانه فرصة على الأقل للنجاة بينما لايزالان يطيعان الأوامر في رسالة زعيمهم. فلا يضيفان الإسمنت وببساطة يلقون ببوب في البحيرة، فلن يغرق ولكن يطفو، كيف يتغير منسوب الماء في هذه الحالة؟

وحل هذين السؤالين يستند إلى أحد أقدم قوانين الفيزياء، قانون معروف منذ العصور القديمة: مبدأ أرخميدس Archimedes' principle، والمُكتشف في القرن الثالث قبل الميلاد. ووفقا للقصة الشهيرة حل أرخميدس (287?-212 قبل الميلاد) معضلة للملك هيرو الثاني King Hiero II ملك سيراكيوز Syracuse، في صقلية Sicily: إذا كان تاج الملك مصنوع من الذهب الخالص، أو أنّ الصائغ سرق بعض الذهب واستبدله بما يعادل وزنه من الفضة، ليخفي عملية السرقة؟ وكما رويت القصة في عدد لا يحصى من كتب الفيزياء المدرسية، أدرك أرخميدس فجأة كيف يُجيب عن هذا السؤال أثناء جلوسه في حوض الاستحمام، وكان متحمسا جدا لاكتشافه لدرجة أنه قفز خارجا من الماء وركض عاريا في الطُرقات وهو يهتف يوريكا Eureka! وبقي الحل الذي اكتشفه الرجل العظيم غامضا، عى الرغم من ذلك، فلم يكتب شيئا عنه، وفي الحقيقة، قصة تاج الملك، لم تذكر لأول مرة حتى بعد قرنين، في كتاب المعماري الروماني ماركوس فيتروفيوس Marcus Vitruvius عن الهندسة المعمارية *On Architecture*.[1]

ويسهل بيان المبدأ: جسم عائم أو مغمور كليا في سائل يختبر قوة طافية Buoyant Force مساوية لوزن السائل المُزاح من قِبل الجسم. وفي حالة الجسم المغمور كليا، يكون حجم السائل المُزاح، بطبيعة الحال، هو حجم الجسم.



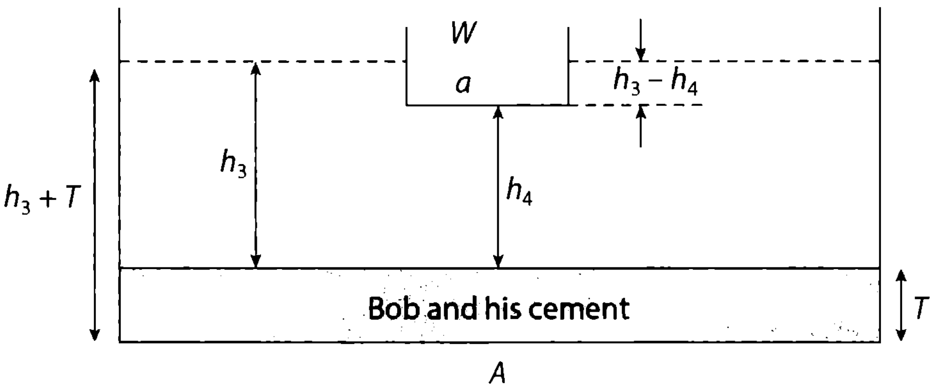
رسم توضيحي 15.1 قبل أن يُرمى بوب والإسمنت من على القارب.

ويُوضّح المبدأ عادة في كُتب الفيزياء المدرسية باعتبار كيفية تغيّر ضغط السائل مع العمق، ويسمح ذلك بحساب محصلة القوة على الجسم للأعلى (للأعلى، أو طافية، لأن الضغط على سطح الجسم أعلى مما هو عليه في أي جزء آخر).[2]

والحلول التي سأريك إياها هنا، لسؤالينا بخصوص التغيرات في مستوى الماء، ستستخدم المبدأ بطريقة تَحلِيلِية. أي أنّ، سأكتب بعض الأسئلة. وبعض المعلقين على هذه الأسئلة كتبوا باستخفاف عن مثل هذا النهج، مفضلين أن يناقشوا طريقتهم للاستنتاج بالكلمات فقط. وأحد الكُتاب الذين صادفتهم عبّر عن هذا الموقف بقوله: "بالتأكيد، الفيزيائي المهووس بالرياضيات سنقض فورا على مثل هذه الأسئلة بكتابة العديد من المعادلات وحلها".

وهذا سيئ؟ هذا ماعليك فعله عندما تواجه أسئلة أصعب بكثير من رمي بوب إلى البحيرة، مسائل لا يمكنك التوصل بسهولة إلى حل بكلمة سهلة. (قبل أن ننتهي من هذا الفصل سأريك مثال لـ "مسألة أرخميدس" فيكون النهج التحليلي ضرورة). لذلك، لأريك كيف تصبح تحليليا باستخدام الفيزياء البسيطة لمسألة "لنرمي بوب" ، سأكتب بعض المعادلات (بالكاد "العديد")، وسترى كيف نصل بسلاسة، ومنهجية وبسرعةَ إلى الأجوبة. سأبدأ بالسؤال الأول.

يوضح الشكل 15.1 وضح بوب قبل أن يرمياه توم وفريد مع حذاءيه المغطيين بالإسمنت من على القارب. وزن القارب مع توم وفريد هو W، ووزن بوب والإسمنت هو M.



رسم توضيحي 15.2 بعد أن رُمي بوب والإسمنت من على القارب

سنعين كثافة الماء ρ_w، وكثافة بوب والإسمنت $\rho > \rho_w$ (لأنّ بوب والإسمنت يغرق). والمساحة المقطعية للقارب (بفرض أنّ له جوانب رأسية) هي a. والمساحة المقطعية للبحيرة (بفرض أنّ لها جدران رأسية) هي A. وقاع البحيرة مسطحة تماما، ومستوى ماء البحيرة هو h_1. وقاع القارب هو h_2 فوق قاع البحيرة، حيث، بالتأكيد، $h_1 > h_2$.

والآن، هذا بالطبع كل الأمور الكئيبة لبوب، ولكن للفيزيائيين ذوي النظرة التحليلية الثاقبة لنتوقف عن التفكير في بوب، فأنّه ببساطة كتلة تُزيح كمية من الماء مُساوية لحجم بوب والإسمنت. سيستقر بوب الفعلي، كفقاعة كبيرة في قاع البحيرة، ولكن بما يخص إزاحة الماء،

يمكننا تخيل بوب والإسمنت كأنه موزع بانتظام بطول قاع البحيرة في شريحة بسماكة T. وهذا مبين في الشكل 15.2، وهي الوضع بعد أن دفع بوب ثمن كونه محتالا شريرا.

حسنا، لنبدأ بالتحليل، المعادلة الأولى التي نستطيع كتابتها فورا هي "حفظ الماء"، أي، أنّ كمية الماء في البحيرة هي نفسها بعد وقبل رمي بوب فيها. وبذلك،

$$(A - a)\, h_1 + ah_2 = (A - a)\, h_3 + ah_4 \qquad (1)$$

قبل أن يُرمى بوب، يزن القارب مع الرجال الثلاثة $W + M$، ولأنّ القارب يطفو مع الرجال، نعلم من مبدأ أرخميدس أنهم يزيحون حجما من الماء يزن $W + M$. وبتذكّر أنّ كثافة الماء هي ρ_w، فإنّ لوزن الماء الحجم $\frac{W+M}{\rho_w}$. ولكن الحجم المُزاح مُعطى بوضوح بالصورة $a(h_1 - h_2)$، وبذلك نحصل على

$$a(h_1 - h_2) = \frac{W + M}{\rho_w}. \qquad (2)$$

وبعد أن رُمي بوب، يزن القارب والرجلان W (فقط فريد وتوم، فللأسف بوب في مكان آخر ومرة أخرى، بينما هما يطفوان، بالمنطق نفسه الذي استخدمناه للحصول على (2) يصبح

$$a(h_3 - h_4) = \frac{W}{\rho_w} \qquad (3)$$

أخيرا، بما أنّ بوب الملصوق بالإسمنت يزن M وله كثافة ρ، يكون حجمه $\frac{M}{\rho}$ ، ويجب أن يساوي AT (حجم بوب وإسمنته حين يُوزّع بانتظام على قاع البحيرة). وبذلك،

$$T = \frac{M}{\rho A}. \qquad (4)$$

والآن، تذكر بحذر ما نسعى إليه لدينا ثلاث معادلات، (1)،(2)،(3)، مع أربع قيم مجهولة، h_1، h_2، h_3 و h_4، إضافة إلى المساعدة (4)، وهي ليست معادلة (هي ببساطة علاقة تعبر عن T بمقادير ثلاثة معلومة). بما أنك تحتاج إلى أربعة معادلات لإيجاد أربع قيم مجهولة، قد تعتقد أننا غارقون في الفشل (بطريقة ما مثل بوب الغارق في الماء). ولكن ليس كذلك! وذلك لأننا نريد أن نعرف فقط التغيير في منسوب الماء. بالرجوع إلى علامة توم في الارتفاع h_1 فوق قاع البحيرة قبل رمي بوب، ومستوى الماء الجديد بعد رمي بوب هو $h_3 + T$ ، وبذلك ما نسعى إليه هو $h_1 - (h_3 + T) = h_1 - h_3 - T$، الذي سنختبره لنرى إن كان سالبا (ارتفع منسوب الماء)، صفرا (لم يتغير منسوب الماء)، أو موجبا (انخفض منسوب الماء). وبما أننا نبحث فقط عن الاختلاف في المجهولين (h_1 و h_3 لأنّ T ليس مجهولا)، ومعادلاتنا الثلاثة بالقيم المجهولة الأربعة كافية لأداء المهمة. من هذه النقطة وصاعدا، هي المسأله هي فقط مسألة جبر بسيط.

من (1)،

$$h_1 + \frac{a}{A-a} h_2 = h_3 + \frac{a}{A-a} h_4,$$

أو

$$h_1 - h_3 = \frac{a}{A-a} h_4 - \frac{a}{A-a} h_2 . \tag{5}$$

من (2)

$$h_1 - h_2 = \frac{W+M}{a\rho_w},$$

ومن (3)

$$h_3 - h_4 = \frac{W}{a\rho_w}.$$

وبذلك،

$$h_2 = h_1 - \frac{W+M}{a\rho_w},$$

و

$$h_4 = h_3 - \frac{W}{a\rho_w}.$$

باستبدال هذه النتائج للارتفاعات h_2 و h_4 في المعادلة (5)، نحصل على

$$\begin{aligned} h_1 - h_3 &= \frac{a}{A-a}\left(h_3 - \frac{W}{a\rho_w}\right) - \frac{a}{A-a}\left(h_1 - \frac{W+M}{a\rho_w}\right) \\ &= \frac{a}{A-a} h_3 - \frac{W}{(A-a)\rho_w} - \frac{a}{A-a} h_1 + \frac{W+M}{(A-a)\rho_w} \\ &= \frac{a}{A-a} h_3 - \frac{a}{A-a} h_1 + \frac{M}{(A-a)\rho_w}. \end{aligned}$$

وبذلك،

$$h_1 + \frac{a}{A-a} h_1 = h_3 + \frac{a}{A-a} h_3 + \frac{M}{(A-a)\rho_w},$$

أو

$$h_1\left(1+\frac{a}{A-a}\right)=h_3\left(1+\frac{a}{A-a}\right)+\frac{M}{(A-a)\rho_w},$$

أو

$$h_1\frac{A}{A-a}=h_3\frac{A}{A-a}+\frac{M}{(A-a)\rho_w},$$

أو

$$h_1A=h_3A+\frac{M}{\rho_w},$$

ومن ثم

$$h_1-h_3=\frac{M}{A\rho_w}.$$

أخيرا، باستخدام (4) نحصل على

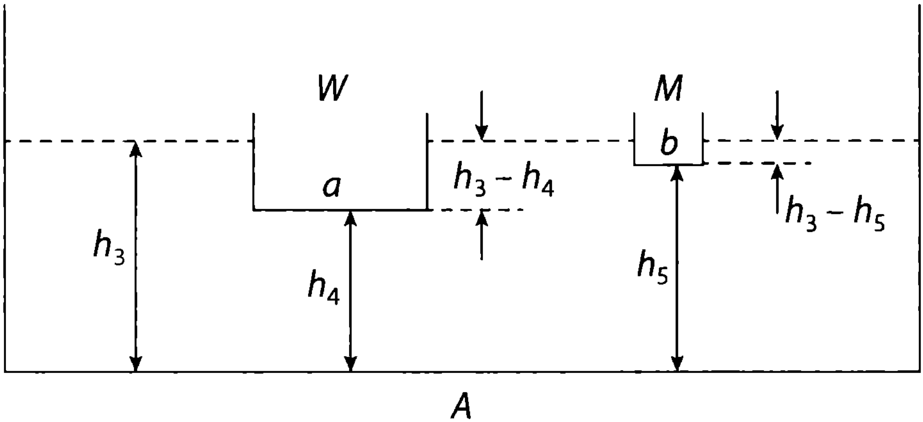
$$h_1-h_3-T=\frac{M}{A\rho_w}-\frac{M}{A\rho}=\frac{M}{A}\left(\frac{1}{\rho_w}-\frac{1}{\rho}\right)=\frac{M}{A}\left(\frac{\rho-\rho_w}{\rho\rho_w}\right)>0,$$

لانّ $\rho > \rho_w$. لذلك، الإجابة عن سؤال فريد هو أنّ مستوى ماء البحيرة ينخفض عند رمي بوب والإسمنت من على متن القارب. وميزة التفكير التحليلي هي أنّه إذا أُخبِرنا بقيم M، A، و ρ (يمكننا البحث عن ρ_w في جدول الثوابت الفيزيائية)، يمكننا حساب كمية الانخفاض.

ستتذكر أنّ بداية هذا الفصل قد ذكرت "مع حل كلمة سهلة" كبديل لنهجنا التحليلي. إليك مثالاً لمثل هذه الحجة. لنفترض بوب والإسمنت ذوي كثافة عالية لدرجة أنّه لوزن مُعطى M، لا يوجد أي حجم لبوب وإسمنته وبذلك، عندما يُرمى بوب، سيطفو القارب أعلى (مما يسبب انخفاض منسوب الماء)، ومع ذلك لن يزيح بوب أي ماء بينما يغرق إلى القاع (وبذلك وجوده في البحيرة لن يكون له تأثير يُذكر في منسوب الماء) ومحصلة التأثير ستكون انخفاض مستوى الماء، كما استنتجنا. لا داعي للحيلة، لكنه حالة قصوى. كيف نعرف أنها دائما صالحة؟ يتجنب النهج التحليلي هذا الأمر ويبرهن على أنه مستوى الماء ينخفض دائما لكل القيم المحتملة a، A، M، W، و $\rho > \rho_w$ ويمكنها أيضا اخبارنا بكم ينخفض المستوى.

والآن للسؤال الثاني: ماذا لو طفا بوب لأنّ فريد وتوم لم يضعا الإسمنت؟ لدينا، لحالة "بعد

رمي بوب"، الموقف الموضح في الشكل 15.3. والقيم المجهولة h_1، h_2، h_3 و h_4 مثل السابق، ولكن الآن لدينا مجهول واحد إضافي h_5 (المسافة التي يطفو بها بوب فوق قاع البحيرة).



رسم توضيحي 15.3 طفو بوب بعد إلقائه من على القارب

ومما يزيد الفضول، حتى بعد أن صار لدينا مجهول إضافي، يجد الكثير من الناس هذه الحالة أكثر "وضوحا" من الأولى، والسبب فيما يلي. قبل إلقاء بوب، هو يطفو (على القارب)، وبعد أن يُلقى به هو يطفو وحده في كلتا الحالتين هو يطفو، والبحيرة لا "تعلم" إذا كان في القارب أم لا. لذلك، لا يجب أن يتغير مستوى ماء البحيرة. في الحقيقة، هذا الاستنتاج صحيح، كما سأريك تحليليا بعد لحظة. على الرغم من ذلك، إذا كنت ستسأل 100 شخص هذا السؤال، سأرجّح أنه سيكون هناك فعلى الأقل بضعة منهم غير متأكدين. ولكن ذا كنت ستعرض على هؤلاء المئة شخص حلا تحليليا سأراهن أنه لن يكون هنالك أي شك. لذلك، لنصبح تحليليين مرة أخرى. سأفترض أنّ بوب يطفو مع جوانب عمودية وله مساحة مقطعية b، كما هو موضح في الشكل 13.5.

ولدينا من قانون حفظ الماء

$$(A - a)h_1 + ah_2 = ah_4 + bh_5 + (A - a - b)h_3. \quad (6)$$

المعادلة (2) مازالت قائمة، وبذلك

$$a(h_1 - h_2) = \frac{W + M}{\rho_w} \quad (7)$$

و (3) مازالت قائمة أيضا، لذلك

$$a(h_3 - h_4) = \frac{W}{\rho_w}. \qquad (8)$$

أخيرا، بكتابة فيزياء بوب الطافي،

$$(h_3 - h_5)b = \frac{M}{\rho_w}. \qquad (9)$$

وبذلك، تكون لدينا أربع معادلات مع خمس قيم مجهولة، وهي كل ما نحتاج إليه لإيجاد $h_1 - h_3$، التغير في مستوى سطح مياه البحيرة.

من (6)،

$$(A - a)h_1 + ah_2 = ah_4 + bh_5 + (A - a)h_3 - bh_3$$

أو

$$(A - a)h_1 + ah_2 = ah_4 + (A - a)h_3 + \mathrm{b}(h_5 - h_3. \qquad (10)$$

من (9)،

$$h_3 - h_5 = \frac{M}{b\rho_w},$$

أو

$$h_3 - h_5 = \frac{M}{b\rho_w}. \qquad (11)$$

وباستبدال (11) في (10)، نحصل على

$$(A - a)h_1 + ah_2 = ah_4 + (A - a)h_3 - \frac{M}{\rho_w},$$

أو

$$(A - a)h_1 - (A - a)h_3 = ah_4 - ah_2 - \frac{M}{\rho_w},$$

أو

$$(A - a)(h_1 - h_3) = a(h_4 - h_2) - \frac{M}{\rho_w},$$

وبذلك

$$h_1 - h_3 = \frac{a}{A-a}(h_4 - h_2) - \frac{M}{(A-a)\rho_w}. \tag{12}$$

من (7)

$$h_1 - h_2 = \frac{W+M}{a\rho_w},$$

ومن (8)،

$$h_3 - h_4 = \frac{W}{a\rho_w}.$$

والنتيجتين الأخيرتين تُشيران إلى

$$(h_1 - h_2) - (h_3 - h_4) = \frac{W+M}{a\rho_w} - \frac{W}{a\rho_w} = \frac{M}{a\rho_w},$$

أو مع إعادة ترتيب بسيط للطرف الأيسر،

$$(h_1 - h_3) - (h_4 - h_2) = \frac{M}{a\rho_w}.$$

وبذلك،

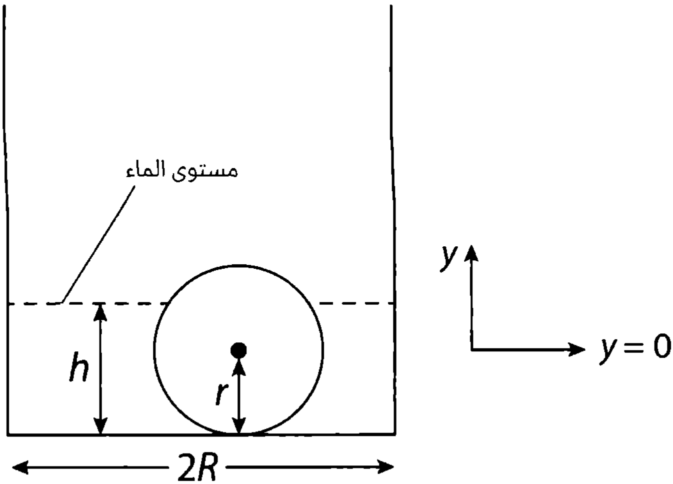
$$h_4 - h_2 = \frac{M}{a\rho_w} - (h_1 - h_3).$$

وباستبدال هذة المساواة في (12)، نحصل على

$$\begin{aligned} h_1 - h_3 &= \frac{a}{A-a}\left[\frac{M}{a\rho_w} - (h_1 - h_3)\right] - \frac{M}{(A-a)\rho_w} \\ &= \frac{M}{(A-a)\rho_w} - \frac{a}{A-a}(h_1 - h_3). \\ -\frac{M}{(A-a)\rho_w} &= -\frac{a}{A-a}(h_1 - h_3). \end{aligned}$$

التي، بسبب $\frac{a}{A-a} \neq 0$، تعني أنّ h_1-h_3 = 0، وبذلك h_1=h_1. ويعني، أنّ مستوى سطح ماء البحيرة لا يتغير إذا طفا بوب بدلا من أن يغرق.

ولنختم هذا الفصل بمبدأ أرخميدس، سأريك لاحقا سؤال "فيزياء بسيطة" مثير للاهتمام يمكنك، إذا كنت تميل، أن تختبره تجريبيا في مغسلة مطبخك. وقد صادفته لأول مرة كمسألة تحدي في المجلة الأمريكية للفيزياء، ولكن للأسف، مؤلف الورقة قد حل المسألة بصورة غير صحيحية.[3] ولحسن الحظ، نشر قارئ تحليلا صحيحا بعد عدة شهور لاحقة، وسأستخدم هنا صورة أخرى من النهج الذي سلكه.[4] فستقدر فورا، لن يُفيدنا أي "حل بكلمة سهلة"، وإنما الرياضيات البحتة (جبر المرحلة الثانوية وحسبان المرحلة الجامعية الأولى، فقط!) مطلوبة.



الرسم التوضيحي 15.4 كرة "بالكاد تطفو" في خزان أسطواني

تخيل أن لديك خزاناً إسطوانياً فارغاً بنصف قطر R، وأنك وضعت كرة بنصف قطر غير معلوم r، في قاع الخزان. (من الواضح، $r < R$ وإلا لن تدخل الكرة). وللكرة كثافة ρ، ولا تعلم قيمتها إلا أنها أقل من كثافة الماء، أي أنّك إذا بدأت بملء الخزان بالماء، ستطفو الكرة في نهاية المطاف. والمشكلة هي في حساب كمية الماء التي تكفي لرفع الكرة من قاع الخزان. ويوضح الشكل 15.4 الأبعاد الهندسية لهذه المسألة، فتبدأ الكرة بالطفو، يكون مستوى الماء في الخزان h. ويظهر مستوى الماء في الرسم التوضيحي فوق منتصف الكرة قليلا، ولكن قيمة h للكرة وهي "بالكاد تطفو" تعتمد على ρ و r من الواضح. لنتفق أثناء بداية التحليل بأن نختار وحداتنا لتكون كثافة الماء 1، مما يعني أنّ $0 < \rho < 1$..

إذا كتبنا v لحجم الماء في الخزان، و v_s لحجم الجزء المغمور من الكرة، إذاً

$$v = \pi R^2 h - v_3. \qquad (13)$$

وهناك احتمالان لعمق الماء، h، تحديدا $h \le r$ (كما هو موضح في الشكل4-15) و $h \ge r$.

ول $h \geq r$ يمكننا كتابة

$$v_s = \frac{2}{3}\pi r^3 + \int_0^{h-r} \pi(r^2 - y^2)\,dy = \pi\frac{3rh^2 - h^3}{3}, \quad h \geq r.$$

فالتعبير الأول على اليمين هو حجم النصف السفلي من الكرة، والتكامل[5] هو حجم جزء الكرة فوق مركز الكرة المغمور أيضا. والمتغير y هي المسافة المقاسة من مركز الكرة (الموجود على y=0).

لاحظ أمرين بخصوص التعبير عن v_s. أولا، يعطي النتيجة الصحيحة لـ $h = 2r\,(v_s = \frac{4}{3}\pi r^3)$ وثانيا، يعطي الجواب الصحيح للحالة $h < r$ أيضا. ويجب أن تركب تكامل v_s مباشرة لحالة $h < r$ وتبرر ذلك (أعلم أنك ستفعل). لذلك، بمتابعة (13) لدينا

$$v_s = \pi\frac{3rh^2 - h^3}{3}, \quad 0 \leq h \leq 2r. \tag{14}$$

وبعدها، نحن نعلم من مبدأ أرخميدس أنّه عندما تكاد الكرة أن تطفو ستزيح كمية من الماء تساوي وزن الكرة، وبذلك، بما أنّ كثافة الماء هي 1، نحصل على

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho = \pi\frac{3rh^2 - h^3}{3} \tag{15}$$

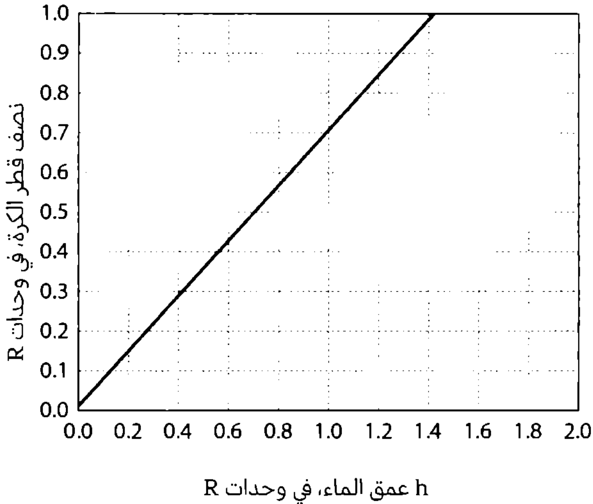
فالطرف الأيسر للمعادلة (15) هو وزن الكرة، وh على الطرف الأيمين هو عمق الماء عندما تبدأ الكرة بالطفو. مع بعض عمليات الجبر البسيطة يمكننا كتابة (15) بالطريقة

$$r^3 - r\frac{3h^2}{4\rho} + \frac{h^3}{4\rho} = 0. \tag{16}$$

حسنا، السؤال الكبير هو، ما ذا نفعل بالمعادلة (16)؟

يمكننا تتبع دليل المؤلف في الملاحظة 4، الذي أدى تحليليا بالحل لثلاثة جذور للمعادلة التكعيبية (16)، مبينا أنّ للكثافة التي $\rho < 1$ هناك ثلاثة حلول حقيقية وأحدها "فيزيائيا". (لم يبين المؤلف قصده من فيزيائيا، وسأخبرك بالمزيد حول هذا بعد قليل) والجبر المتضمن في حل (16)، على الرغم من ذلك يصبح معقدا جدا (على الرغم من أنّ طالبا في الثانوية حائزا على مرتبة الشرف في الرياضيات يستطيع حل ذلك)، وبذلك سأتخذ منهجا مختلفا.

بداية، إليك تكراراً لملاحظة بسيطة قمت بها سابقا: أكبر كرة يمكنك وضعها في قاع الخزان لها نصف قطر R= r. لذا، لقيمة معطاة للكثافة $\rho < 1$، لنحل تكرارا (على الحاسوب[6]) لنصف قطر r مع جعل الارتفاع h يتغير من 0.0.1 R إلى 2R، على خطوات من 0.01R.



رسم توضيحي 15.5 r مقابل h عندما ρ = 0.8

أي أنّ، ندع h تتغير من بالكاد أي ماء في الخزان إلى ماء كافي في الخزان ثم إلى كامل الكرة مغمورة تماما، حتى لأكبر كرة ممكنة. في مكان ما في الفترة للارتفاع h، أي كرة يمكن أن تدخل في الخزان ستبدأ بالطفو. وإذا اخترنا R لتكون وحدة الطول، عندها تتغير h من 0.01 إلى 2، بخطوات من 0.01، مما يعطينا 200 قيمة من h.

لكل القيم 200 للارتفاع h سنحل المعادلة (16) لمصف قطر r، وبذلك سنحصل على 200 زوج من قيم (r, h)، مما يسمح لنا برسم منحنى لنصف القطر r مقابل الارتفاع h للكثافة المعطاة ρ. ويبين الشكل 15.5 مثل هذا الرسم لحالة $\rho = 0.8$ (اختيرت عشوائي)، وكما ترى (كمثال)، إذا $h = 1$ (بوحدات R) سيكون نصف قطر الكرة بالكثافة التي ستبدأ فيها بالطفو هي (r = 0.7) تحديدا، 0.7014)، مرة أخرى بوحدات R.

والآن إليك لغزاً صغيراً (الذي ستجيب عليه بسرعة) هناك قيمة أخرى لنصف القطر r للارتفاع h=1 الذي يستوفي المعادلة (16)، تحديدا، $r = 0.4033$. يمكنك التأكد من ذلك بوضع r=0.4033 ببساطة في (16)مع h =1 و ρ = 0.8 وترى إن كان ذلك يعمل. إذاً، لماذا لا نرى قيمة r هذه في الشكل 5-15؟ لأنها ليست "فيزيائية!" وإليك السبب.

كل المعادلات التكعيبية مع معاملات حقيقية (كما في (16)) لديها ثلاثة حلول، لكل منها إما حقيقية أو زوج المترافق المعقد Complex-Conjugate Pair.[7]

لذلك، ستحصل (16) إما على حل واحد حقيقي وحلين معقدين، أو ستحصل على ثلاثة حلول حقيقية. ومن المستحيل الحصول على حلين حقيقيين وواحد معقد، لأن الحلول المعقدة تظهر كأزواج. والآن لبيان المعادلة التكعيبية من هذا النموذج

$$r^3 - pr + q = 0$$

فكل من p و q موجب (كما في (16))، دائما لها حل حقيقي سالب،[8] وهو حل نرفضه فورا كحل غير فيزيائي. (وبعد كل ذلك، متى رأيت آخر مرة كرة بنصف قطر سالب؟) وهذا يعني، من الجملة الأولى لهذه الفقرة، أنّ الحلين الآخرين هما إما حقيقيان أو معقدان.

إذا كان هذان الحلّان معقدين إذا سنرفضهم أيضا، كحلول غير فيزيائية، لأن نصف القطر المعقد (ظلال من البعد الرابع!) هي بسوء النصف قطر السالب. ولكن هذا لن يظهر هذا الاحتمال لمعادلتنا (16) لأن، فيزيائيا، نعلم أنّ لكل قيمة للارتفاع h يجب أن تكون هناك كرة (بنصف قطر r) تطفو. وبذلك، نعلم أنّ (16) سيكون لها ثلاثة حلول حقيقية. إضافة إلى ذلك، التحليل المذكور في الملاحظة 8، الذي يظهر أنّ هناك دائما حلاً سالباً واحداً، أيضا يظهر أنّه يجب على الحلين الآخرين الحقيقيين أن يكون كلاهما موجبين.

لكن حقيقة أنّ هذين الحلين الموجبين الحقيقيين هي ليست كافية للسماح لهما لاجتياز متطلب "الفيزيائي". وهناك حقيقة، متطلبان اثنان إضافيان على الحل الموجب أن يستوفيهما ليكون فيزيائيا. أولا، يجب ألا يكون نصف القطر r أكبر من 1 (بوحدات R) وإلا، كما ذكرنا سابقا، لن تدخل الكرة إلى الخزان. حسنا، ستقول، كلا من $r = 0.7014$ و $r = 0.4033$ أقل من 1، لذا كلاهما يجتازان الاختبار. ولكن هناك اختبارا نهائيا للفيزياء الذي لا يجتازه $r = 0.4033$. هل رأيته بعد؟

ليكون الحل صالحاً فيزيائيا، على قيمة نصف القطر r الموجبة التي تحقق (16) أن تكون بحيث $2r > h$. ويعني ذلك ببساطة أنّ الكرة تبدأ بالطفو قبل أن تكون مغمورة كليا. وإذ لم تطفُ خلال الوقت الذي تكون فيه مغمورة كليا، فإنها لن تطفو فجأة بمجرد أنك تصب ماء أكثر إلى الخزان! وحل $r = 0.4033$ يرسب في الاختبار لأن $0.8066 < 1 = h$. وحل $r = 0.7014$ المبين في الشكل 5-15 ينجح في الاختبار النهائي للفيزيائية ($1.4028 > 1 = h$). والخلاصة هي أنّ لكل h و $\rho < 1$ هناك بالضبط حل واحد صالح فيزيائيا لقيمة r.

والآن، ماذا عن سؤالنا الأصلي: ما كمية الماء التي في الخزان عندما تبدأ الكرة بالطفو؟ يمكننا الإجابة عن ذلك حالما نحصل على r للكثافة ρ و h معطيان. سنستبدل فقط r و h في المعادلة (14) لإيجاد v_s، وبعدها استبدال v_s في (13) للحصول على v. هذا هو!

ملاحظات

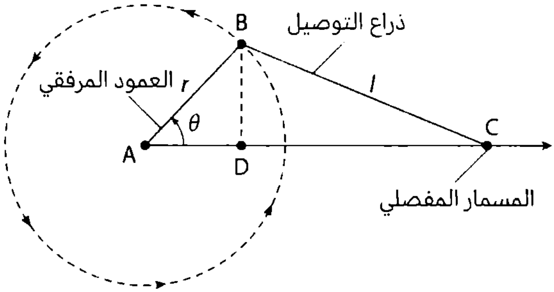
1. مناقشة لطيفة جدا عن كيف يُناقش علماء الفيزياء ما فعله أرخميدس Archimedes (أيا كان) في مقالة ليليان هارتمان هودسون: Lillian Hartmann Hoddeson, "How Did Archimedes Solve King Hiero's Crown Problem?—An Unanswered Question," The Physics Teacher, January 1972, pp. 14–18.
2. ومن المفارقات، قراءة فيتروفيوس Vitruvius ألمحت بقوة في أنّ الطفو ليس له علاقة بمشكلة تاج الملك! فيتروفيوس يكتب: "يصدف أنّ [أرخميدس] يصل إلى مكان الاستحمام، وهناك، بينما كان يجلس في الحوض، لاحظ أنّ كمية المياه التي تتدفق على الحوض تساوي الكمية التي غمرت جسده. " لذلك، وفقا لفيتروفيوس، ما اكتشفه أرخميدس هو أن وسيلة لقياس حجم جسم معقد (مثل تاج الملك) هو من خلال إزاحته للماء. (هل يذكركم هذا بقصة أديسون التي أخبرتكم بها في نهاية الفصل 1؟) لوزن معين من الذهب والفضة، سيزيح كميات مختلفة لأن كثافاتها مختلفة. مع هذا النهج، الحجم المزاح هو الفكرة الرئيسية وليس الطفو.
3. I. Richard Lapidus, "Floating Sphere," American Journal of Physics, March 1985, pp. 269 and 280.
4. Lawrence Ruby, "Floating Sphere Problem," American Journal of Physics, November 1985, pp. 1035–1036.
5. لن أدخل في تفاصيل هذا التكامل إلا لأقول أنّه مثال لتكامل قياسي لإيجاد الحجم واقعيا في كتاب حسبان كل طالب جامعي مستجد. لكن يجب أن تمر خلال تفاصيل تقييم التكامل فقط لتبرير النتيجة.
6. هذا كتاب عن الفيزياء وليس لبرمجة الحاسوب، ولك إذا كنت فضوليا، استخدمت عناصر الرياضيات الرمزية لبرنامج ماتلاب MATLAB. وإذا كنت حقا فضوليا بشأن التفاصيل، راسلني وسأبعث إليك الرمز الذي أنتج الشكل 15.5.
7. هذا استنتاج من حجة رياضياتية بحتة من نظرية المعادلات (من دون تدخل الفيزياء)، ويمكنك العثور على المزيد منه في كتب عن هذا الموضوع. وكفيزيائيين نحن نثق بأصدقائنا الرياضياتيين ونعتبر الاستنتاج كحقيقة.
8. هل يمكنك إثبات ذلك؟ إنه رياضيات بحتة (من دون فيزياء)، وإن كنت لا تستطيع (ولكنك فضولي)، راسلني وسأرسل إليك التحليل الذي هو ليس طويلا ولا صعبا.

16 مسألة ترددية

"عجلات الحافلة تدور وتدور...
والركاب في الحافلة يصعدون إلى الأعلى وينزلون إلى الأسفل"...
- كلمات من أغنية لمرحلة الحضانة أثارت سخطاً بآباء وأمهات أطفال
ماقبل الروضة لعقود من الزمن

لمثال على استعمال علم المثلثات، والهندسة (وبعض الحسبان أيضا) للتعامل مع مسألة مهمة في الفيزياء الهندسية، تأمل الشكل 16.1. هناك سترى منظراً مقطعياً لعمود مرفقي *Crankshaft* دوار في A، مع ذراع مرفقية Crank Arm بطول r ممتدا خارجا لمفصل معلق في B. وبينما يدور العمود المرفقي باتجاه عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة ω راديان/ثانية، يدور B مع محيط الدائرة ذات النصف قطر r بسرعة ثابتة. وبدورها B مرتبطة بمفصل معلق عند C بواسطة ذراع التوصيل *Connecting Rod* بطول l، و C هو موقع مسمار مفصلي *Wrist Pin* يسمح مكبس متصل بأن يتحرك ذهابا وإيابا بطول المحور السيني x-axis بواسطة ذراع التوصيل.

كما هو موضح، يتحرك المكبس بسبب دوران العمود المرفقي نتيجة لمصدر طاقة خارجية (فلنقل تورييناً مغموراً في مياه جارية) وبذلك قد يصبح التركيب الكلي مضخة. ومن جهة أخرى، قد يدور العمود المرفقي (وبذلك تحريك الناقل ومن ثم عجلات السيارة) بسبب أنّ المكبس مزود ببخار ناتج من وقود مشتعل بسرعة داخل الأسطوانة التي تحيط بالمكبس. وفي هذه الحالة يكون لدينا محرك الاحتراق الداخلي. ولكن، بما أنّ العمود المرفقي يدور فعلينا أن نحسب موضع وسرعة وعجلة المسمار المفصلي للمكبس.



الرسم التوضيحي 16.1 الأبعاد الهندسية للعمود المرفقي/ ذراع التوصيل/ المسمار المفصلي

من الهندسة المبينة في الشكل 16.1 يمكننا كتابة موضع المسمار المفصلي المُقاس من A

$$x(t) = \overline{AD} + \overline{DC}.$$

لاحظ، بحرص، أننا نكتب $x = x(t)$ لأنّ $\theta = \theta(t)$. والآن بما أنّ

$$AD = r\cos(\theta)$$

وبما أنّ نظرية فيثاغورس تملي علينا أنّ

$$\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = l^2,$$

حيث

$$\overline{BD} = r\sin(\theta),$$

يصبح لدينا

$$x(t) = r\cos(\theta) + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\theta)} = r\cos(\theta) + l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\theta)},$$

أو

$$\boxed{\frac{x(t)}{l} = \left(\frac{r}{l}\right)\cos(\theta) + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\theta)}, \quad \theta = \omega t.}$$

المعادلة التي في الإطار للمقدار $\frac{x(t)}{l}$ يبين التقنية المفيدة لتعيير Normalizing المتغيرات: لدينا موقع المسمار المفصلي بالنسبة إلى طول ذراع التوصيل، أي أنّ طول ذراع التوصيل يؤدي دور طول الوحدة.

لإيجاد سرعة المسمار المفصلي، نفاضل التعبير للدالة $x(t)$ – وليس التعبير $\frac{x(t)}{l}$- للحصول على

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}\left\{l^2 - r^2\sin^2(\theta)\right\}^{-1/2}\left\{-2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\right\},$$

التي تصبح بعد استخدام القليل من الجبر البسيط

$$\frac{dx}{dt} = -\omega r\sin(\theta) - \frac{\omega r\, r\sin(\theta)\cos(\theta)}{l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2(\theta)}}.$$

وسرعة B بطريقة خلال دورة واحدة كاملة يتحرك B عبر مسافة $2\pi r$ في $\frac{2\pi}{\omega}$ ثانية وبذلك تصبح سرعة B

$$\frac{2\pi r}{\frac{2\pi}{\omega}} = \omega r,$$

التي سنستخدمها كوحدة السرعة لتعيير سرعة المسمار المفصلي. أي أنّ سرعة المسمار المفصلي هي:

$$\boxed{\frac{\frac{dx}{dt}}{\omega r} = -\sin(\theta)\left\{1 + \frac{\left(\frac{r}{l}\right)\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2(\theta)}}\right\}, \quad \theta = \omega t.}$$

وفي النهاية، للحصول على عجلة المسمار المفصلي، سنفاضل $\frac{dx}{dt}$ للحصول على

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega r\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt} - r^2\omega$$

$$\times\left[\frac{\sqrt{l^2-r^2\sin^2(\theta)}\left\{\cos^2(\theta)\frac{d\theta}{dt}-\sin^2(\theta)\frac{d\theta}{dt}\right\}-\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{1}{2}\times\left\{l^2-r^2\sin^2(\theta)\right\}^{-1/2}\left\{-2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\right\}}{l^2-r^2\sin^2(\theta)}\right],$$

التي بعد إجراء القليل من الجبر البسيط، يتقلص إلى

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 r\left[\cos(\theta)+\left(\frac{r}{l}\right)\frac{\cos(2\theta)+\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^4(\theta)}{\left\{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2(\theta)\right\}^{3/2}}\right].$$

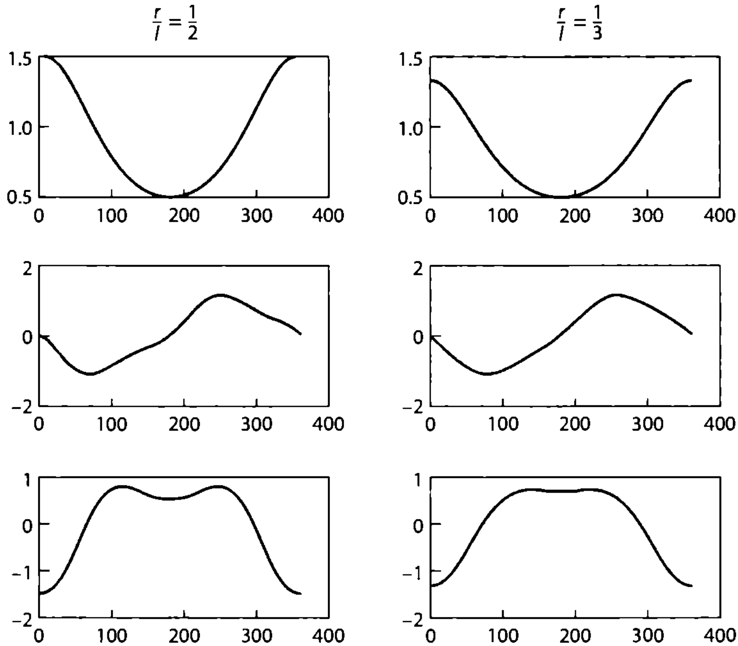
وكما فعلنا مرتين سابقا، سَنُطبّع العجلة هذه مع عجلة متضمنة في المسألة، وهنا هي $\omega^2 r$ (التي يمكنك التأكد من أنّ لها وحدات العجلة،[1] سابقا قي الكتاب، في فصل 5، أطلقنا عليها اسم العجلة المركزية). وبذلك عجلة المسمار المفصلي بعد التعبير هي

$$\boxed{\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\omega^2 r}=-\left[\cos(\theta)+\left(\frac{r}{l}\right)\frac{\cos(2\theta)+\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^4(\theta)}{\left\{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2(\theta)\right\}^{3/2}}\right],\quad \theta=\omega t.}$$

ويبين الشكل 16.2 رسومات للتعابير الثلاثة المؤطرة في الصناديق لموقع وسرعة وعجلة المرفق المفصلي بعد التعبير لقيمتين للحد $\frac{r}{l}$ ($\frac{1}{2}$ في العمود الأيسر، و $\frac{1}{3}$ في العمود الأيمن). والمتغير المستقل، الزاوية θ، مرسومة على المحور الأفقي لدورة كاملة للعمود المرفقي، بدلا من الزمن، فإنه الحد الذي يستخدمه صناع المركبات لتحديد الضبط المناسب لتوقيت الاشتعال في محركات الاحتراق الداخلي.

وعلى سبيل المثال، في أوراق مواصفات التوقيت يجد الميكانيكيين تعابير مثل "اضبط على 12 درجة BTDC" الذي يعني "اضبط شمعة الاشتعال لتشتعل عندما يكون المكبس في الموقع 12 درجة قبل أعلى منتصف شوط الكبس *compression* stroke"

وهذه الرسوم البيانية ستكون محل اهتمام كبير لمهندسي التصميم الميكانيكي المسؤولين عن اختيار المعادن ذات القوة اللازمة لتحمل السرعات والعجلات المتوقعة لتركيب العمود المرفقي/ ذراع التوصيل/ والمسمار المفصلي.



الرسم التوضيحي 16.2 الموقع، السرعة، العجلة للمسمار المفصلي لقيمتين من r/l

ملاحظات

1. وحدات $\omega^2 I$ هي راديان-متر تربيع/ثانية تربيع، ولكن الراديان يعتبر فيزيائيا عديم الأبعاد.

17 كيف تلتقط كرة البيسبول (أو لا تلتقطها)

"يجب أن تكون القوانين الفيزيائية جميلة رياضياتيا".
- كتبها بول ديراك الحائز على جائزة نوبل لعام 1933 في الفيزياء على سبورة في موسكو في 1955

سترى في هذا النقاش نتيجة نظرية مذهلة من علم المثلثات والفيزياء التي يبدو أنها تفسر حدثا مذهلا بالقدر نفسه يتكرر في لعبة البيسبول (لكنه روتيني بشكل مدهش). للأسف، "التفسير" خاطئ. وهذا لا يدحض فرضية ديراك (يجب على الفيزياء الجيدة أن تكون جميلة)، ولكنه يشير إلى العكس من ذلك (الفيزياء الجميلة هي فيزياء جيدة) ليس بالضرورة عبارة صحيحة.

وهذا سيئ جدا، لأن النظرية التي سأشرحها تاليا هي جميلة بشكل ملحوظ في بساطتها. والمسألة في الأصل من مقالة نُشرت بقلم المهندس الكهربائي الأمريكي فانيفار بوش Vannevar Bush (1890-1974)، "عندما يلتقي المضرب بالكرة When Bat Meets Ball". إذ كتب فيها "ويلي مايز لحظة ضرب الكرة، سيلقي نظرة قصيرة على طيران الكرة، ويركض دون أن يرى خلفه، ويقف على الموقع الصحيح في الوقت الصحيح ويلتقط الكرة فوق كتفه بمسكة سلة. لا أحد يعلم كيف يفعل ذلك، بالتأكيد ولا حتى ويلي مايز".[1]

حتى بالنسبة إلى من هم مثلي يجدون كل مباراة في البيسبول تشبه كل مباراة سبقتها، إلا أن هذا الحدث الرياضي هو شيء لابد أن نراه. وبعد عام من نشر مقالة بوش، اعتقد أحد المحللين أنه تمكن من اختزالها إلى رياضيات بحتة، وكتب: "لا تبدو أنها غامضة أبدا".[2] معلنا أنها ببساطة أحد مسائل "توقع حركة الهدف عند معرفة قوانين الحركة الخاصة به". وأنّ مثل هذا التوقع "هو أمر يؤديه الفلكيون [و] ومهندسو الصواريخ الباليستية الدفاعية بشكل قياسي"، وجادل تشابمان بما يلي.

"لنفترض أن الكرة ارتحلت عن المضرب (المركز) بسرعة ابتدائية V وبزاوية θ على مستوى سطح الأرض. كما هو معروف جيدا... الإزاحة Displacements [الرأسية والأفقية الإحداثيات السينية والصادية للكرة] في أي وقت t [$t = 0$ هي اللحظة التي يضرب فيها حامل المضرب الكرة] هما

$$y = V\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$x = V\cos(\theta)t,$$

حيث g هي مقدار عجلة الجاذبية".

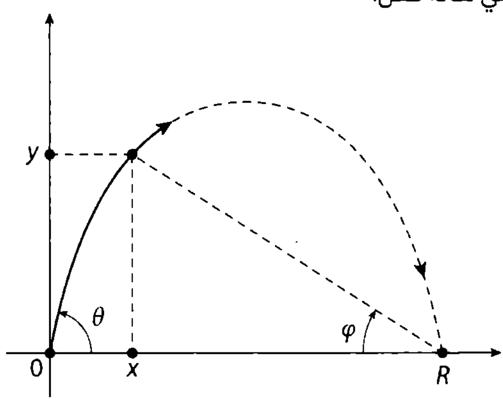
لاحظ -بحرص- أنّه إذا تجاهلنا مقاومة الهواء (كما فعل تشابمان)، فالقوة الوحيدة التي تعمل على الكرة حالما تترك الكرة المضرب هي الجاذبية، رأسيا إلى الأسفل، وبذلك لا يتغير أبداً المركب الأفقيِ لسرعة الكرة– $V\sin(\theta)$ -. ونحصل على المعادلة السابقة للمركب x. ولكن، بالنسبة إلى المركب الرأسيِ لسرعة الكرة، تفصح الجاذبية عن وجودها عن طريق تقليل السرعة الابتدائية للمركب باستمرار- $V\sin(\theta)$ - وبذلك نحصل على

$$\frac{dy}{dt} = V\sin(\theta) - gt,$$

الذي من السهل حساب التفاضل عليه للحصول على معادلة تشابمان للمركب y.[3]

وبعدها سأل تشابمان قُرائه النظر في الرسم التوضيحي 17.1، حيث يقف حامل المضرب في النقطة المركزية لنظام إحداثيات السين والصاد، ويقف ملتقط الكرة (لحسن الحظ) في الموقع الذي ستسقط في الكرة في نهاية المطاف (هذه الحالة الخاصة ستصبح مريحة بعض الشيء بعد قليل)، على بعد R من حامل المضرب. وبذلك لن يرى ملتقط الكرة مسار منحنى الكرة المقذوفة، ولكن بدلا من ذلك، تبدو له الكرة ببساطة ترتفع إلى الأعلى ثم تنزل إلى الأسفل في مستوى رأسي يعبر بين ضارب الكرة والمُلتقِط. ما الدليل المرئي المتوفر لملتقط الكرة في هذه الحالة – أصعب شيء يمكن أن يواجهه- الذي يخبره بأنّ الكرة قادمة باتجاهه؟ هذا السؤال الذي اعتقد تشابمان أنّه قدم جوابا عنه.

في الشكل 17.1 خط رؤية ملتقط الكرة نسبة إلى الكرة تولد زاوية ϕ بالنسبة إلى مستوى الأرض، ويبعد ملتقط الكرة مسافة R من حامل المضرب (حيث R هي النقطة التي ترجع فيها الكرة إلى الأرض). ولا يُعطي تشابمان تفاصيل الخطوات الوسطى (يكتب فقط بعد "تغييرات متواضعة في العمليات الجبرية" لمعادلات السين والصاد x and y نحصل على نتائج إجابته)، ولكني سأريكم فيما يلي ماذا فعل.



الرسم التوضيحي 17.1 كرة مضروبة باتجاه الملتقط.

بداية نعين $t = T$ لتكون الوقت الذي ترجع فيه الكرة إلى الأرض (أي عندما يلتقط المُلتقط الكرة). بعدها، حين تكون $y(T) = 0$، يصبح لدينا

$$V\sin(\theta)T - \frac{1}{2}gT^2 = 0,$$

وبحل $T>0$، نحصل على

$$T = \frac{2\,V\sin(\theta)}{g}.$$

وباستبدال هذه النتيجة في معادلة x، وبما أنّ $x(T) = R$، يصبح لدينا

$$R = \frac{2V^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g}.$$

من هندسة الرسم 17.1 يمكننا الكتابة فورا، لكل لحظة من زمن $0<t<T$،

$$\tan(\phi) = \frac{y}{R-x} = \frac{V\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2}{\frac{2V^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g} - V\cos(\theta)t} = \frac{t\left[V\sin(\theta) - \frac{1}{2}gt\right]}{V\cos(\theta)\left[\frac{2\,V\sin(\theta)}{g} - t\right]}$$

$$= \frac{t[2V\sin(\theta) - gt]\frac{1}{2}}{V\cos(\theta)\frac{1}{g}[2V\sin(\theta) - gt]},$$

$$= \frac{g}{2V\cos(\theta)}t,$$

ومن ثم نصل إلى النتيجة البسيطة

$$\tan(\phi) = (\text{ثابت})\ t$$

أي أنّ ملتقط الكرة الواقف عند الموقع الصحيح الذي ستسقط فيه الكرة، سيزداد المماس Tangent لزاوية ارتفاع خط رؤيته لموقع الكرة اللحظي مع الزمن خطيا.

والآن، قبل فحص ماذا تعني النتيجة الرياضياتية الجميلة بكل تأكيد، لنرى فيما يلي ماذا يحدث في الحالة الواقعية التي لا يكون فيها ملتقط الكرة واقفا على الموقع الصحيح لسقوط الكرة لالتقاطها من دون حركة. لنفترض بدلا من ذلك أنّ الملتقط لا يزال يرى الكرة في المستوى

الرأسي الذي يحويه وضارب الكرة، ولكنه الآن يبعد مسافة s عن موقع سقوط الكرة. أي أنّ، في الزمن $t = 0$ سيبعد الملتقط عن الضارب إما مسافة $R - s$ أو $R + s$. سأحل الحالة "القريبة جدا" – وبذلك على لاقط الكرة أن يركض خارجا (بعيدا) عن المركز – وسأتركك تُجري التغييرات الصغيرة في التحليل لتُظهر أنّ الحالة "البعيدة جدا" ستؤدي إلى النتيجة نفسها.

لنفرض أنّ τ هي زمن ردة فعل ملتقط الكرة وأنّه لحظ اتخاذ قرار التحرك، فإنه يركض بسرعة ثابتة v التي توصله إلى الموقع $x=R$ بزمن $t = T$، أي

$$s = v(T - \tau).$$

وإحداثي ملتقط الكرة الموازي للمحور الأفقي بزمن $t \geq \tau$ هو $(R - s) + v(t - \tau)$، وبذلك نستطيع أن نكتب الآن

$$\tan(\phi) = \frac{y}{(R - s) + v(t - \tau) - x}.$$

وبما أنّ

$$s = vT - v\tau,$$

من ثم

$$\tau = \frac{vT - s}{v} = T - \frac{s}{v},$$

وبذلك

$$\tan(\phi) = \frac{V\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2}{R - s + v\left(t - T + \frac{s}{v}\right) - V\cos(\theta)t}$$

$$= \frac{t\left[V\sin(\theta) - \frac{1}{2}gt\right]}{\frac{2V^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g} - s + v(t - T) + s - V\cos(\theta)t}$$

$$= \frac{t[2V\sin(\theta) - gt]\frac{1}{2}}{\frac{2V^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g} + v\left[t - \frac{2V\sin(\theta)}{g}\right] - V\cos(\theta)t}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}gt[2V\sin(\theta) - gt]}{2V^2\sin(\theta)\cos(\theta) + v[gt - 2V\sin(\theta)] - Vg\cos(\theta)t}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}gt\,[2V\sin(\theta) - gt]}{2V^2\sin(\theta)\cos(\theta) - v[2V\sin(\theta) - gt] - Vg\cos(\theta)t}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}gt[2V\sin(\theta) - gt]}{V\cos(\theta)[2V\sin(\theta) - gt] - v[2V\sin(\theta) - gt]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}gt[2V\sin(\theta) - gt]}{[2V\sin(\theta) - gt][V\cos(\theta) - v]}$$

$$= \frac{gt}{2[V\cos(\theta) - v]},$$

أو، مرة أخرى

t (ثابت) = tan(ø)

وكما سبق، حتى مع التعقيد المضاف من المتغيرين الجديدين s و τ، سيزداد المماس لزاوية ارتفاع خط رؤيته لموقع الكرة اللحظي مع الزمن خطيا. مذهل!

ولكن، ربما تتساءل بعد التفكير قليلا، ماذا إذاً؟ ويكتب تشابمان في نهاية تحليله: "من الواضح أن أي لاعب لا يحل معادلات المثلثات للإمساك بالكرة. وما حاولت أن أبينه هنا أن الكمية البسيطة للمعلومات عن ثبات معدل التغير tan(ø)... تخبره بأنه يركض بالسرعة المناسبة في الاتجاه الصحيح لالتقاطها". ولكن كيف يفسر هذا جري ويلي مايز بينما الكرة خلف ظهره ولا ينظر إليها إلا قبل الإمساك بها؟ وهناك اعتراض جدي آخر على تحليل تشابمان. هو تجاهل مقاومة الهواء، وكتب (خطأ)، أنّ قوى الديناميكية الهوائية Aerodynamics المبذولة على

كرة البيسبول هي نسبيا صغيرة ولها تأثير بنسبة ضئيلة في مسار الحركة". وهذا ببساطة غير صحيح، ومعادلات المحورين السيني والصادي الخاصة به غير كاملة منذ البداية. فإن كليهما يستلزم مزيدا من سحب الهواء، وغيابه يُبطل كليا نتيجة $\tan(\theta)$ المعترف بجمالها. نعم جميلة ولكن (فقط إذا كنت تلعب على سطح القمر في الفراغ) غير صحيحة.[4]

ملاحظات

1. في كتاب بوش Bush العلم ليس كافيا *Science Is Not Enough*, William Morrow & Company, 1967, pp. 102–122. كان عضو قاعة المشاهير Hall of Fame للعبة البيسبول ويلي مايز Willie Mays، بالطبع أعظم لاعب ملتقط للكرة في فريق نيويورك وسان فرانسيسكو جاينتس New York and San Francisco Giants (وبعدها نيويورك ميتس New York Mets) من 1951 إلى 1973.
2. Seville Chapman, "Catching a Baseball," American Journal of Physics, October 1968, pp. 868–870.
3. بينما أطبع هذه الفقرات تذكرت قصة رواها أستاذ الفيزياء أنثوني زي Anthony Zee من جامعة كاليفورنيا University of California بسانتا باربارا Santa Barbara في كتابه بعنوان جاذبية آينشتاين باختصار: Anthony Zee tells in his book *Einstein Gravity in a Nutshell*, Princeton University Press, 2013, p. 501، عندما كان يستعيد ذكرياته الجامعية في برينستون: "عندما كنت طالبا مستجدا، أُعلن أنّ [أستاذ الفيزياء الفخري في برينستون] جون ويلر John Wheeler سيقدم مقرر تجريبي (تربوي بدلا من فيزيائي) لمجموعة منتقاة من الطلبة الجدد. وسأل ويلر مجموعة الطلبة التي تشكلت أسئلة لتمييز الطيب من الخبيث، نوعا ما. ومازلت أتذكر السؤال الذي أطاح بأكبر عدد من الآملين. هل للكرة المقذوفة عجلة تساوي صفرا عند قمة طيرانها؟"
والجواب (الذي أخمن أنّ زي أصاب فيه) هو، بالتأكيد، لا، الكرة المقذوفة دائما تتعجل نحو الأسفل بالتحديد 1 g. وفي مسألة تشابمان، المثل صحيح عند $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$.
4. لكيفية التعامل مع مقاومة الهواء في تحليل تشابمان (ليس سهلا!)، انظر: The Physics of Judging a Fly Ball," *American Journal of Physics*, September 1985, pp. 849–855. وتناقش هذه الورقة أيضا، في بعض التفاصيل، الأدلة البصرية بالنسبة إلى ملتقط الكرة.

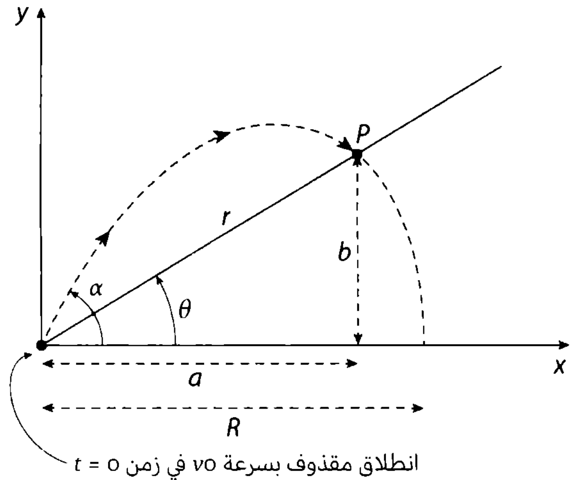
18 قذف الكرات وإطلاق الرصاص صعودا

هل الطريق يرتفع حتى التل على طول الطريق؟
نعم، للنهاية.
هل ستستغرق رحلة النهار اليوم بطوله؟
من الصباح إلى الليل، يا صديقي.
- مسائل الصعود إلى "أعلى التل" تفوق الفيزياء[1]

يراقب معلم الفيزياء للمرحلة الثانوية في بنسلفانيا Pennsylvania درسا للتربية البدنية يُلقي فيها التلاميذ كرة لينة بمحاذاة سطح مائل نحو الأعلى، كجزء من البرنامج الوطني لتحديد اللياقة البدنية.[2] وعندما علم أنّ تقييم أداء التلاميذ يعتمد على المسافة التي تقطعها الكرة حتى تسقط على الأرض، حينها أدرك فورا أنّ طريقة التقييم غير صحيحة. وذهب إلى المنزل ليفكر أكثر في الموضوع.

وبعد سنوات سأل تلميذٌ معلمَة فيزياء للمرحلة الثانوية في الصف في النرويج Norway، "هل صحيح حقا أنك دائما ترمين عاليا جدا عندما تصوبين [بندقية] إلى الأعلى باتجاه التل [على غزال]؟"[3] و قادت مناقشة الصف الناتجة بسرعة التلاميذ إلى الاستنتاج بأن نعم، ترمي عاليا صعودا (ومنخفضا هبوطا)، ولكن المعلمة لم تكن متأكدة من أنّ ذلك صحيح تماما. وذهبت إلى المنزل للتفكير أكثر في هذا الموضوع.

وهاتان الحالتان اللتان تبدوان مختلفتين تماما تنطويان على الفيزياء البسيطة نفسها، ويمكننا أن نستخدم الشكل 18.1 لوضع نموذج هندسي لحل مسألتي معلمي المدارس الثانوية. ولفهم ما يجري في المسألتين، كل ما سنحتاج إليه كرياضيات هو بعض من علم المثلثات المباشرة ومجرد معرفة وجيزة من حسبان السنة الجامعية الأولى. وفي كلتا المسألتين، سنتجاهل مضاعفات سحب الهواء، وسنعتبر الجاذبية هي القوة الوحيدة التي تعمل إما على الكرة اللينة أو الرصاصة أثناء انتقالها في طريقها.



الرسم التوضيحي 18.1 الأبعاد الهندسية للرمي/ للإطلاق صعودا نحو أعلى تل

لمسألة الكرة اللينة، يُسجّل أداء التلميذ كقيمة r، التي يجب أن تكون قيمة R. أي أنه عندما تأسست مقاييس رمي الكرة اللينة كانت للرمي فوق سطح أفقي ($\theta = 0$)، وليس سطح مائل بزاوية لأعلى ($\theta > 0$). وكانت مسألة المعلم في بنسلفانيا عند توفر قياس r وقيمة θ، لتحديد صيغة تصحيحية لتعطي R كدالة من r و θ و α (زاوية القذف الابتدائي مُقاسة بالنسبة إلى المحور الأفقي).

وفي مسألة الصيد، بالتأكيد، يصوب الصياد البندقية (لتعويض سقوط الرصاصة) عبر مسافة معينة يتوقع أنها ستصيب الهدف عنده - كما سبق وأن تدرّب على إطلاق النار- في ميدان رماية أفقي. ومشكلة مسألة المعلمة النرويجية هي الحاجة إلى تحديد الآثار المترتبة من $\theta \neq 0$ (نماذج $\theta > 0$ لإطلاق الرصاصة باتجاه أعلى التل، و نماذج $\theta < 0$ لإطلاق الرصاصة باتجاه أسفل التل) على موقع نقطة اصطدام الرصاصة، P.

للبدء بالتحليل، لنكتب السرعة الابتدائية للمقذوف (سواء الكرة اللينة أم الرصاصة) كالسرعة v_0. في نظام الإحداثي السيني والصادي الموضح في الشكل 18.1، يمكننا كتابة مركبات السرعة الابتدائية ($t=0$) للمقذوف كالتالي:

$$v_{0x} = v_0 \cos(\alpha),$$

و

$$v_{0y} = v_0 \sin(\alpha).$$

وبما أنّ الجاذبية تعمل باتجاه الأسفل على المقذوف، فإن المركب الصادي الأفقي للسرعة فقط هو الذي سيتأثر، ويبقى المركب السيني دون تغيير. لذلك، باستخدام g لعجلة الجاذبية يمكننا كتابة مركبات السرعة للمقذوف في الزمن $t \geq 0$ كما يلي:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) = \frac{dx}{dt},$$

و

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt = \frac{dy}{dt}.$$

وبتكامل المعادلتين الأخيرتين بالنسبة إلى الزمن، نحصل على إحداثيات موقع المقذوف في زمن t:

$$x(t) = v_0 t \cos(\alpha),$$

و

$$y(t) = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2.$$

بالتأكيد، اخترت الثوابت العشوائية للتكامل لتكون $x(0) = y(0) = 0$، وبما أنّ نقطة البداية للمقذوف (في المسألتين) هي المركز.

بحل معادلة $x(t)$ لإيجاد t نحصل على

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}.$$

وبعدها نستبدل هذه النتيجة للزمن t في معادلة y، نحصل على مسار القطع المكافئ للمقذوف (اكتشاف غاليليو، في عام 1638)

$$y = x \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2.$$

والإحداثي السيني والصادي للنقطة P، نقطة تصادم المقذوف على السطح المائل، هي السيني $x = a$, والصادي $y = b$ حيث:

$$a = r\cos(\theta), \quad b = r\sin(\theta)$$

وباستبدال الرموز للإحداثي السيني والصادي في معادلة القطع المكافئ، نحصل على:

$$r\sin(\theta) = r\cos(\theta)\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}r^2\cos^2(\theta).$$

حل واضح وبسيط لـ r هو عندما $r = 0$، والتي سنتجاهلها فورا. سنحصل على نتيجة مثيرة للاهتمام إذا أخرجنا r وأعدنا ترتيب الرموز لكتابة

$$r\left[\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}r\cos^2(\theta) + \sin(\theta) - \cos(\theta)\tan(\alpha)\right] = 0$$

وبمساواة المعامل في القوس المربع بالصفر. من ثم،

$$r = \frac{\{\cos(\theta)\tan(\alpha) - \sin(\theta)\}\, 2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g\cos^2(\theta)}$$

$$= \frac{\cos(\theta)\left\{\tan(\alpha) - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right\} 2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g\cos^2(\theta)}$$

$$= \frac{\left\{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right\} 2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g\cos(\theta)} = \frac{\left\{\sin(\alpha) - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\cos(\alpha)\right\} 2v_0^2\cos(\alpha)}{g\cos(\theta)}$$

$$= \frac{\{\cos(\theta)\sin(\alpha) - \sin(\theta)\cos(\alpha)\}\, 2v_0^2\cos(\alpha)}{g\cos^2(\theta)}$$

أو، أخيرا، بمجرد أن نتذكر الهوية المثلثية لطرح زاويتين،

$$\boxed{r = \frac{2v_0^2}{g\cos^2(\theta)}\cos(\alpha)\sin(\alpha - \theta).} \qquad \text{(A)}$$

ويعطي التعبير في (A) مسافة رمي الكرة اللينة المُقاسة على طول السطح المائل. وإذا كانت الزاوية $\theta = 0$ مما يعني أن الرمية كانت فوق السطح الأفقي، إذا $r = R$، وبذلك

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2}{g}\cos(\alpha)\sin(\alpha).} \qquad \text{(B)}$$

ونحصل من (A)

$$\frac{2v_0^2}{g} = \frac{r\cos^2(\theta)}{\cos(\alpha)\sin(\alpha-\theta)}$$

وباستبدال هذا التعبير في (B) يعطينا معادلة التحويل لمعلم فيزياء المرحلة الثانوية في بنسلفانيا:

$$\boxed{R = r\frac{\cos^2(\theta)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha-\theta)}.} \qquad \text{(C)}$$

ولاستخدام (C)، بالتأكيد علينا أولا أن نقرر أي زاوية رمي سنستخدم α. وأفضل خيار أن تكون قيمة α التي تجعل من r أقصى قيمة، التي يمكننا إيجادها من اشتقاق r بالنسبة إلى الزاوية α مساوية للصفر. وبعمل ذلك، نحصل على، من (A)،

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\alpha} &= \frac{2v_0^2}{g\cos^2(\theta)}[\cos(\alpha)\cos(\alpha-\theta) - \sin(\alpha)\sin(\alpha-\theta)] \\ &= \frac{2v_0^2}{g\cos^2(\theta)}\cos(2\alpha-\theta) = 0.\end{aligned}$$

وبذلك،

$$2\alpha - \theta = 90^\circ.$$

أو قيمة α التي تعطي أقصى مسافة أعلى السطح المائل θ هي:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{1}{2}\theta.$$

لسطح أفقي ($\theta = 0°$) نجد $\alpha = 45°$ هي الأفضل، ولكن لميلان °2 (على سبيل المثال، $\alpha = 46°$ الأكبر قليلا هي الأفضل. لذلك لنفترض أن تلميذا رمى الكرة اللينة نحو أعلى سطح يميل °2 مسافة $r = 200$ قدم الذي يجب تسجيله، لغرض المقارنة الوطنية، هو

$$R = 200\frac{\cos^2(2^\circ)\sin(46^\circ)}{\sin(44^\circ)}\text{feet} = 207\text{ feet}.$$

وهو تصحيح ليس غير مهم.

حسنا، لننصرف الآن إلى المسألة التي عُرضت على معلمة الفيزياء النرويجية. بالعودة إلى (B)، نرى أنه إذا صُوّبت البندقية في ميدان رماية أفقي لإصابة هدف تحديدا، على بُعد R، إذا على البندقية أن تُرفع فوق مستوى الرمي الأفقي بزاوية ϕ، حيث

$$\cos(\phi)\sin(\phi) = \frac{Rg}{2v_0^2} = \frac{1}{2}\sin(2\phi).$$

وإذا

$$\sin(2\phi) = \frac{Rg}{v_0^2}.$$

وبالرجوع إلى الشكل 18.1، نرى أنّ ϕ هي α في الحالة الخاصة عندما تكون θ =0 . والزاوية ϕ هي، عموما، ليست كبيرة. على سبيل المثال، بندقية صيد تستخدم خرطوش رصاص. 30-06 ("أو ما يُدعى Thirty aught six) قد تكون لها سرعة ماسورة من نحو 2,500 قدم/ثانية، وبذلك، لهدف على بُعد 200 = R ياردة (600 قدم)، ستكون زاوية الارتفاع ϕ

$$\phi = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left\{\frac{Rg}{v_0^2}\right\} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left\{\frac{600 \times 32.2}{2.500^2}\right\} = 0.089^\circ.$$

والآن، للرمي باتجاه أعلى التل، لنفترض أنّ البندقية مرفوعة بزاوية β، بحيث تكون قيمة r ماتزال R، المسافة التي تُصوّب فيها البندقية (مع زاوية ϕ) من المستوى الأفقي للرمي. ما مدى مقارنة الزاوية β بالزاوية ϕ؟ ولدينا $\alpha = \theta + \beta$ وبذلك، من (A)،

$$R = \frac{2v_0^2}{g\cos^2(\theta)}\cos(\theta+\beta)\sin(\beta).$$

أو، بما أنّ

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin(2\phi),$$

يصبح لدينا

$$\sin(2\phi) = \frac{2\cos(\theta+\beta)\sin(\beta)}{\cos^2(\theta)}.$$

وهو،

$$\frac{1}{2}\sin(2\phi)\cos(\theta) = \frac{\{\cos(\theta)\cos(\beta)-\sin(\theta)\sin(\beta)\}\sin(\beta)}{\cos(\theta)}$$

$$= \cos(\beta)\sin(\beta) - \tan(\theta)\sin^2(\beta)$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\beta) - \tan(\theta)\sin^2(\beta).$$

إذاً، في النهاية،

$$\boxed{\sin(2\beta) = \sin(2\phi)\cos(\theta) + 2\tan(\theta)\sin^2(\beta)} \qquad \text{(D)}$$

هناك الكثير من المعلومات المخبأة في المعادلة (D). لاحظ، أولا، أنه إذا o= θ (ميدان رماية أفقي)، إذا o = $\tan(\theta)$، و 1 = $\cos(\theta)$، وبذلك $ø = \beta$ تماما كما يجب. وأيضا لاحظ أنّ $\theta \neq$o، من ثم، لأنّ $\cos(\theta)$ تعطي نتائج زوجية عند o= θ، بينما $\tan(\theta)$ تعطي نتائج فردية عند o= θ، ستكون $\sin(2\beta)$ مساوية للدالة $\sin(2ø)\ \cos(\theta)$ إضافة إلى مقدار تصحيحي إذا o< θ (للرمي باتجاه أعلى التل) ولكن بطرح مقدار التصحيح نفسه إذا o > θ (للرمي باتجاه أسفل التل). وهذا، ليتمكن الرامي من إصابة الهدف على البعد نفسه R منه- أم منها على مستوى مائل، وزاوية الارتفاع β مختلفة للسيناريوهين أعلى أو أسفل التل.

ولكن، بما أنّ زوايا ارتفاع البندقية عالية السرعة تكون صغيرة، فإنّ المقدار التصحيحي يكون أيضا صغيرا (إذا كانت الزاوية β صغيرة، إذن $\sin(\beta)$ صغير، و $\sin^2(\beta)$ صغير جدا). لذلك، لنتجاهل مقدار التصحيح الصغير جدا هذه ونكتب ببساطة:

$$\sin(2\beta) = \sin(2\phi)\cos(\theta).$$

التي تخبرنا مباشرة بأنّ $ø > \beta$. على سبيل المثال، لبندقية الخرطوش 30-60. بسرعة ماسورة تبلغ 2,500 قدم/ ثانية التي أخذناها بعين الاعتبار فيما سبق، لإصابة هدف على بُعد 600 قدم على ميلان °35، يجب أن تكون زاوية الارتفاع

$$\beta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left\{\frac{Rg}{v_0^2}\cos(35^\circ)\right\} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left\{\frac{600\times 32.2}{2{,}500^2}\times 0.81915\right\} = 0.0725^\circ.$$

هذا التخفيض في زاوية الارتفاع ضروري لأنّ الشخص الذي يستعمل زاوية ارتفاع ø المحسوبة سابقا للرمي الأفقي سيتخطى الهدف مع رمي مائل. هل ستتخطى أو يتخطى الهدف كثيرا؟ نعم.

لرؤية ذلك، لنقدم للمسألة بطريقة أخرى. كان حسابنا الأخير لإيجاد زاوية الارتفاع β لإصابة الهدف على بُعد المسافة نفسها على المستوى المائل كما تفعل زاوية ارتفاع β لرمية أفقية. لنستمر الآن باستخدام زاوية الارتفاع ø على الرمي المائل وحساب المسافة r عند إصابة الميلان.

لدينا $\alpha = \theta + ø$ وإذن، من (A)،

$$r = \frac{2v_0^2}{g\cos^2(\theta)}\cos(\theta+\phi)\sin(\phi),$$

أو، بما أنّ

$$\frac{v_0^2}{g} = \frac{R}{2\cos(\phi)\sin(\phi)},$$

لدينا

$$r = \frac{\cos(\theta+\phi)}{\cos(\phi)\cos^2(\theta)}R.$$

للزاوية $\theta = 35°$ و $\phi = 0.089°$، لدينا

$$r = \frac{\cos(35.089°)}{\cos(0.089°)\cos^2(35°)}R = \frac{0.81826}{(1)(0.671)}R = 1.22R.$$

ستتذكر أنّ $R = 600$ قدم، وبذلك $r = 732$ قدم، وهو تخطي الإصابة بمسافة كبيرة جدا. وستكون هذه الحالة لكلا السيناريوهين لأعلى وأسفل التل، وبذلك يصبح استنتاج فصل معلمة الفيزياء على حق، بخصوص الحالة لأعلى التل، وعلى خطأ في الاستنتاج بخصوص حالة أسفل التل.

سأختتم هذا الفصل بملاحظتين تاريخيتين. فمسألة إطلاق البندقية من على سطح مائل قديمة، ولم تبدأ من فصول فيزياء الثانوية في النرويج أو كونيتكت ولكن من أوائل أربعينات القرن الـ17 مع عالم الرياضيات الإيطالي إيفانجليستا توريسيلي Evangelista Torricelli (1608-1647). ونتيجتنا بأنّ قيمة α التي تعطي أقصى مسافة فوق المستوى المائل بزاوية θ هي

$$\alpha = 45° + \frac{1}{2}\theta$$

قد وجدها صديق نيوتن أدموند هالي Edmund Halley بعد نصف قرن، (انظر: ملاحظة 2 في الفصل 14)، ونشرها في 1695 في المراجعات الفلسفية للجمعية الملكية *Philosophical Transactions of the Royal Society*. وهناك عبر عن النتيجة بالطريقة الأنيقة التالية. بملاحظة أنّ:

$$\alpha = 45° + \frac{1}{2}\theta = \theta + \frac{1}{2}(90° - \theta),$$

لاحظ هالي أنّ المدى الأقصى للتصويب من على سطح مائل يتحقق بالتصويب من زاوية تُنصِّف الزاوية المتشكلة بين المستوى المائل والمستوى الرأسي.

ملاحظات

1. هذه الكلمات هي افتتاحية المقطع الشعري لقصيدة من عام 1861 "أعلى التل Up-Hill" بقلم كريستينا روسيتي Christina Rossetti، شاعرة إنجليزية مرموقة في الزمن الفيكتوري Victorian Perion.

Does the road wind up-hill all the way?
Yes, to the very end.
Will the day's journey take the whole long day?
From morn to night, my friend.

2. Joseph C. Baiera, "Physics of the Softball Throw," The Physics Teacher, September 1976, pp. 367–369.
3. Ole Anton Haugland, "A Puzzle in Elementary Ballistics," The Physics Teacher, April 1983, pp. 246–248.

19 السفر السريع في أنبوب عبر الدائرة العظيمة

"من جانبي، أنا أسافر ليس للذهاب لأي مكان. أنا أسافر لأجل السفر. الأمر العظيم هو التحرك".
-روبرت لويس ستيفنسون 1878 يسافر مع حمار. في هذا التحليل سندرس طرق السفر الأرضي الذي ستنتقل فيها أسرع بكثير من حمار.

في أواخر تسعينات القرن الـ19 وبعدها، كان أحد أروع أفكار "العلم الخيالي" Scientification (كما كان يُطلق على الخيال العلمي آنذاك) في ذلك العصر هو السفر السريع من مدينة إلى أخرى على كوكب (ليس بالضرورة الأرض) عبر أنفاق مستقيمة محفورة عبر الكوكب. (رواية 1864 رحلة إلى مركز الأرض *A Journey to the Center of the Earth* للكاتب جولز فيرن Jules Verne التي تنزل فيها الشخصيات إلى أماكنهم المقصودة، ماهي إلا خيال رومانسي بدلا من نتاج خيال علمي). وأقصى صور هذا الفكرة، حلم تلميذ المدرسة "بحفرة إلى الصين"، وهو نفق على طول قطر الكوكب عبر اللب يخرج من الجهة الأخرى، قد ظهر في رواية بعنوان أنبوب الأرض *The Earth Tube* في عام 1929. وسيكون النفق المستقيم الذي يربط مثلا مدينة نيويورك وفيلادلفيا أكثر واقعية، نفق قد يمكنه في أعمق أجزائه، أن يصل إلى 1,200 قدم "فقط" تحت السطح.[1]

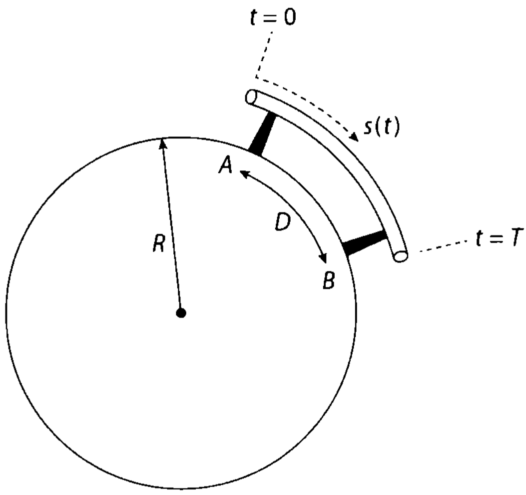
في 1953 قُدّم مفهوم أكثر واقعية للنقل،[2] مفهوم لا أعتقد أنّه حظي بالكثير من الاهتمام. وأجده مثيرا للاهتمام بعد 62 عاماً (أثناء كتابتي لهذا الكتاب)، وربما كان ببساطة سابق لزمنه. والتحليل الرياضياتي لهذا المفهوم سيكون أكثر الفصول تحديا في هذا الكتاب، ولكنك إذا التزمت بالمسار أعتقد أنك ستجده يستحق المجهود.

إذا سألك أحدهم، ما أقصر طريق يربط بين نقطتين على سطح مستوٍ؟ أعتقد أنك ستجاوب بسرعة، خط مستقيم. ولكن بماذا تجيب عن السؤال نفسه إذا لم يكن السطح مستويا وإنما كرويا (مثل سطح الأرض)؟ مسار الخط المستقيم هو نفق عبر الأرض، ولكن، كما ألمحت في الفقرات الافتتاحية، أننا لن نسلك هذا الطريق (نعم، نعم، إنها تورية سيئة، أعلم ذلك). الجواب هو مسار دائرة عظيمة، أي تقاطع السطح المنحني مع السطح الذي يمر عبر أي نقطتين معطاتين ومركز الكرة. هناك، بالتأكيد، مساران من مسارات أي دائرة كبيرة تربط نقطتين معطاتين على الكرة (يسيران باتجاهين متعاكسين)، ونحن نتكلم هنا عن أقصر الاحتمالين، ما

يسميه علماء الرياضيات القوس الأصغر *Minor Arc*.[3] وتلقى مسارات الدوائر العظيمة اهتمام خطوط الطيران في محاولاتها لتقليل زمن الطيران وتكلفة وقود الرحلات.

لنفترض على وجه التحديد، أننا نريد الطيران من مدينة نيويورك إلى ملبورن في أستراليا، وهي رحلة تعبر تقريبا نصف الكوكب على مسار حلقة عملاقة طولها 10 آلاف ميل أو نحو ذلك. فالرحلة على طائرة تجارية هي رحلة طويلة ومرهقة، تستلزم 20 ساعة في الجو. ماذا لو كان الإمكان بدلا من ذلك السفر خلال 44 دقيقة ولا تكون بعيدا جدا من السطح (من دون الحاجة إلى رحلة صاروخية)؟ سيكون ذلك شيئا رائعا حقا، ألا تعتقد ذلك؟ سترينا بعض الفيزياء البسيطة (وبعض الرياضيات) أنه ليس من المستحيل تماما عمل ذلك من وجهة نظر علمية، على الرغم من أنه لن يكون بثمن قليل.

تخيل أنبوب نقل مرتفع، مفرغ من الهواء، وتتحرك عبره مركبة نقل ركاب بطول مسار حلقة عظيمة من البداية إلى النهاية. وأعني بمرتفع أنّ الأنبوب مدعم بأبراج تبلغ عدة عشرات الأقدام فوق سطح الأرض. والأنبوب يُحيط بفراغ Vacum لأن مركبة نقل الركاب ستكون متحركة، وكما سنشاهد، بسرعة عدة أميال/ثانية. وقيمة الحلقة العظيمة، إلى جانب الفائدة الاقتصادية كونها أقصر مسار سطحي ممكن، هي الحقيقة الرياضِياتِيَة أنّ، في جميع الأوقات، قوى الجاذبية والطرد المركزية المبذولة على المركبة والركاب هي قطرية الاتجاه (ولكن في اتجاهات عكسية، طبيعيا). وهناك بالطبع، قوى ثالثة أيضا تعمل على المركبة، وهي التي تدفع المركبة عبر أنبوب النقل وتُنتج مماس العجلة $\frac{d^2s}{dt^2}$ لسطح الأرض. وأخيرا، سنتجاهل أي تأثير ناتج من دوران الأرض.



رسم توضيحي 19.1 الأبعاد الهندسية لأنبوب النقل على أرض لا تدور
(الأبعاد ليست مرسومة وفقا لمقياس!)

يمثل الشكل 19.1 الأرض، وأنبوب النقل الذي يربط النقطتين A و B. أحرص على ملاحظة، أنّه بسبب التناظر للكرة يمكننا دائما أن نضع الكرة في موقع بحيث ، من دون فقدان العمومية،

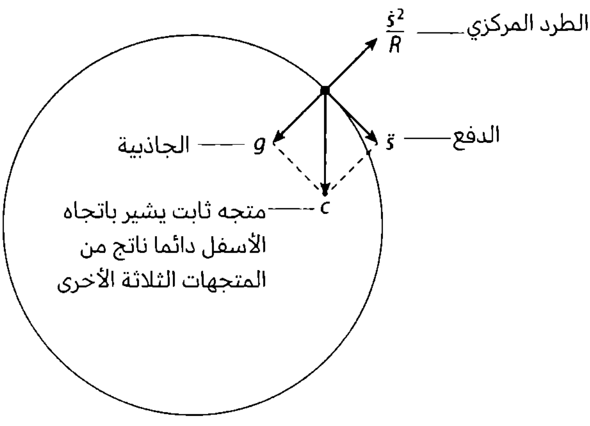
تظهر أبعاد أنبوب النقل كما هي موضحة بالشكل. وإذا كانت $s(t)$ هي المسافة خلال زمن t التي قطعتها المركبة من A في طريقها إلى B، إذن $s(0) = 0$، وسرعة المركبة هي:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

حيث $v(0) = 0$. أي أنّ المركبة تبدأ رحلتها (كما يقول الفيزيائيون) "من السكون From rest". ومن ناحية أخرى، إذا كانت D المسافة بين A و B، وإذا T هو الزمن الذي تستغرقه كامل الرحلة، إذن $s(t) = D$.

ويمثل الشكل 19.2 مرة أخرى الأرض، ويُبيّن متجهات العجلات الثلاث. والرمز المستخدم لمشتقات الزمن في ذلك الشكل هو التدوين النقطي *Dot notation* الذي قدّمه العظيم نيوتن في تطوير حسبانه، حيث:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt},$$



الرسم التوضيحي 19.2 تعجّل مركبة أنبوب النقل

و

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\dot{s}}{dt}.$$

سنستخدم أسلوب التدوين هذا مرة أخرى في الخاتمة، لذا انتبه جيدا!

بكتابة g كعجلة الجاذبية للأرض على السطح (حيث يوجد أنبوب النقل)، فإنّ محصلة

عجلة المركبة المتجه للداخل هي:

$$g-\frac{v^2}{R}=g-\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=g-\frac{1}{R}\dot{s}^2.$$

حيث R هي نصف قطر الأرض. وستلاحظ وجود متجه رابع لعجلة مبينة في الشكل 19.2، بمقدار c وتشير إلى الأسفل (انظر: نهاية الفقرة لتعرف ماذا يعني إلى الأسفل). ومتجه العجلة وهذا هو نتيجة تجميع متجهات عجلة الجاذبية الأرضية والقوة الطاردة المركزية وقوة الدفع وبعدها تحديد الناتج ليكون ذا مقدار ثابت ودائما يشير إلى الأسفل مباشرة. وهذه القيود، كما سترى لاحقا، ستحدد $s(t)$.

وقد اقترح آلن Allen (انظر: ملاحظة 2) قيمة 40 قدم/ثانية تربيع لمقدار من متجه c، وهي قيمة أكبر بمقدار 25% من 1g (سيشعر شخص يزن 160 رطلاً كأنه يزن 200 رطل). وهذا أقل تطرفا بكثير مما يُتعرض له عند ركوب القطار الأفعواني ويمكن للأشخاص الأصحاء تحمله بسهولة، خصوصا لفترات قصيرة نسبيا لرحلة في أنبوب نقل. ويمكن للمتجه c أن يدور بزوايا كبيرة في الرحلات ذات المسافات الطويلة. لذلك، إذا سُمح لمقاعد الركاب بالدوران على قضيب داعم بطول عرض المقعد (بعبارة أخرى من الكتف إلى الكتف)، سيشعر الركاب بأنهم ثابتون (مع قوة ثابتة تضغطهم في مقاعدهم) بينما تدور المركبة حولهم. ففي الرحلات القصيرة (لنقل من نيويورك إلى بوسطن) تأثير الدوران سيكون بالكاد ملحوظا. وقد يضطر الركاب إلى قبول مهانة أن يعلقوا مثل الغسيل باستخدام خطاف، وأقدامهم متدلية نحو الأسفل باتجاه المتجه c، ولكن نظرا لحالة السفر هذه الأيام، فالأغلبية ربما مستعدون لهذه الخطة القادمة (لامحالة؟) من الامتهان الذي يتعرض له كثيرو السفر.

للبدء بتحليلنا، نستخدم نظرية فيثاغورس:

$$\boxed{(\ddot{s})^2+\left(g-\frac{1}{R}\dot{s}^2\right)^2=c^2.} \qquad \text{(A)}$$

من قانون التسلسل Chain rule في الحسبان، حيث يُتعامل مع التفاضل ككميات جبرية (انظر: في أي كتاب حسبان للسنة الأولى الجامعية للتفاصيل)، لدينا:

$$\ddot{s}=\frac{d\dot{s}}{dt}=\left(\frac{d\dot{s}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d\dot{s}}{ds}\dot{s},$$

وبذلك تصبح المعادلة (A) التي في الإطار

$$\left(\frac{d\dot{s}}{ds}\dot{s}\right)^2+\left(g-\frac{1}{R}\dot{s}^2\right)^2=c^2.$$

وبالحل لإيجاد تفاضل ds، نحصل على:

$$ds=\frac{\dot{s}\,d\dot{s}}{\sqrt{c^2-\left(g-\frac{1}{R}\dot{s}^2\right)^2}}.$$

وبالتكامل غير المحدد نحصل على:

$$s+k=\int\frac{\dot{s}\,d\dot{s}}{\sqrt{c^2-\left(g-\frac{1}{R}\dot{s}^2\right)^2}},$$

حيث *k* هي، للآن، ثابت عشوائي. سنجد ماهي k فعليا بعد قليل. "لإجراء" التكامل الموجود في الجهة اليمنى، سنقوم أولا بتغيير متغير التكامل إلى *x* (الذي لا يغير شيئا، غير أنه لن نضطر إلى وضع نقطة فوق *s*). وهو:

$$\int\frac{\dot{s}\,d\dot{s}}{\sqrt{c^2-\left(g-\frac{1}{R}\dot{s}^2\right)^2}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{c^2-\left(g-\frac{1}{R}x^2\right)^2}},\quad x=\dot{s}.$$

والآن نغير المتغير مرة أخرى إلى:

$$u=g-\frac{1}{R}x^2,$$

وبذلك

$$\frac{du}{dx}=-\frac{2x}{R},$$

أو

$$dx=-\frac{R}{2x}du.$$

وبذلك، يصبح التكامل:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{c^2-\left(g-\frac{1}{R}x^2\right)^2}} = -\frac{R}{2}\int \frac{du}{\sqrt{c^2-u^2}} = -\frac{R}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{c}\right)$$

فالتعبير الذي في أقصى اليسار يمكن ببساطة إيجاده في جدول التكاملات (أسهل طريقة "لإجراء" التكاملات).[4] والآن، بما أنّ:

$$u = g - \frac{1}{R}x^2 = g - \frac{1}{R}\dot{s}^2,$$

لدينا

$$s + k = -\frac{R}{2}\sin^{-1}\left(\frac{g-\frac{1}{R}\dot{s}^2}{c}\right).$$

للانتهاء، لدينا سؤال واضح وحيد متبقٍ وينتظر الإجابة: ماهي k؟ حسنا نحن نعلم أنّه في بداية رحلتنا عبر أنبوب النقل (t=0) كان لدينا 0 = s(0)، وأننا بدأنا من السكون. أي أنّ، 0=$\dot{s}$(0). لذلك، بوضع هذه الشروط الابتدائية نحصل على:

$$k = -\frac{R}{2}\sin^{-1}\left(\frac{g}{c}\right).$$

التي تعطينا

$$\boxed{s(t) = \frac{R}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{g}{c}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{g-\frac{1}{R}\dot{s}^2}{c}\right)\right].} \qquad \text{(B)}$$

لم ننته من تحليلنا بعد، لكن لكي لا تضيع في وحل الرموز الكثيرة، اسمح لي بالتوقف للحظة وشرح ماذا تخبرنا به المعادلة (B). يمكننا حل (B) لإيجاد $\dot{s}(t)$، سرعة المركبة في الوقت t، كدالة لـ $s(t)$ المسافة التي قُطعت خلال الوقت t للوصول إلى:

$$\boxed{\dot{s}(t) = \sqrt{R}\sqrt{g - c\sin\left\{\sin^{-1}\left(\frac{g}{c}\right) - \frac{2}{R}s(t)\right\}}.} \qquad \text{(C)}$$

(يجب أن تقنع نفسك أنّ (C) صحيحة بُعديا، وأنّ الطرف الأيمن حقا عنده وحدات الطول/ثانية). والآن يمكننا استعمال هذه النتيجة لحساب السرعة القصوى للمركبة بينما تنتقل خلال أنبوب النقل، كالتالي.

خذ بعين الاعتبار تناظر الرحلة. تبدأ المركبة من A، مع $s = 0$، وبعدها تتسارع كما هو مطلوب لتحقيق محصلة العجلة الثابتة للأسفل c لراكب على مقعده. ويستمر التسارع حتى منتصف الرحلة، عند $s = \frac{1}{2}D$، في الوقت الذي تكون فيه سرعة المركبة قصوى. وتتباطأ المركبة في التناظر (سالب) لعجلة النصف الأول من الرحلة لإيقاف المركبة عند $s = D$ في الوقت $t = T$. (وتخبرنا هذه النتيجة بأننا نصل إلى النقطة $s = \frac{1}{2}D$ عند $t = \frac{1}{2}T$). لذا، إذا حددنا $s = \frac{1}{2}D$ في (C)، إذا ستحصل $\dot{s}(t)$ على قيمتها القصوى. وبوضع القيم $c = 40$ قدم/ثانية تربيع، $g = 32.2$ قدم/ثانية تربيع، $R = 3{,}960$ ميل = 2.09×10^7 قدم و $s = \frac{1}{2}D = 5000$ ميل = 2.64×10^7 قدم (رحلة مدينة نيويورك – ملبورن، أستراليا)، يُعطينا نتيجة $\dot{s}_{max} = 38{,}830$ قدم/ثانية = 7.35 ميل/ثانية.

وهذا سريع جدا، و، بالطبع، أي شخص يركب أنبوب النقل سيجده مثيرا وممتعا(؟) بمعرفة أنهم يتحركون (عند نقطة المنتصف) بأكثر من 26,00 ميل/ساعة. ولكن الأسئلة التي يفكر فيها من يريد استخدام أنبوب النقل هي: (1) ماهي التكلفة؟ (2) كم ستستغرق الرحلة من الوقت؟ والسؤال الأول هو في مجال الاقتصاد، وليس الفيزياء، ولكن يمكننا الإجابة عن الثاني مع القليل فقط من الرياضيات، كالتالي:

من المعادلة (A) في الإطار،

$$\left(\frac{d\dot{s}}{dt}\right)^2 = c^2 - \left(g - \frac{1}{R}\dot{s}^2\right)^2$$

التي يمكننا حلها لإيجاد تفاضل dt للحصول

$$dt = \frac{d\dot{s}}{\sqrt{c^2 - \left(g - \frac{1}{R}\dot{s}^2\right)^2}}.$$

يعطي التكامل الأساسي

$$\int dt = \int \frac{d\dot{s}}{\sqrt{\left\{c - \left(g - \frac{1}{R}\dot{s}^2\right)\right\}\left\{c + \left(g - \frac{1}{R}\dot{s}^2\right)\right\}}}.$$

لاحظ أنّ حدود التكامل قد أُلغيت لكلا التكاملين، وسنحددهما قريبا. والآن، باستخدام تغيير العلامة للتبسيط مرة أخرى كالسابق $x = \dot{s}$، نحصل على

$$\boxed{\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{\left\{c - \left(g - \frac{1}{R}x^2\right)\right\}\left\{c + \left(g - \frac{1}{R}x^2\right)\right\}}}, \quad x = \dot{s}.} \qquad (D)$$

بعدها نقوم بتغيير المتغير من x إلى ϕ، فنحدد علاقتها لتكون

$$x = \sqrt{R(c+g)}\cos(\phi),$$

وهو تعريف قد يبدو غامضا جدا. نحن بالطبع أحرار بعمل أي تغيير نريد، ولكن لماذا هذا؟ الإجابة السهلة هي أنه سيعطينا في نهاية المطاف تكامل معلوم، ولكن يبقى السؤال: كيف يعلم الشخص مسبقا بأنّ هذا التغيير "صالح"؟ آه، هذا ما يعتمد على سمعة المحلل (يجب أن أسرع وأقول ليس سمعتي أنا، ، فهذا التغيير من ورقة آلن المشارة إليها في الملاحظة 2)!
على أي حال، استكمالا، لدينا

$$g - \frac{1}{R}x^2 = g - \frac{R(c+g)}{R}\cos^2(\phi) = g - (c+g)\cos^2(\phi)$$
$$= g\sin^2(\phi) - c\cos^2(\phi).$$

وأيضا،

$$\frac{dx}{d\phi} = -\sqrt{R(c+g)}\sin(\phi),$$

وبذلك، بالعودة إلى التعبير في الإطار (D) وبإجراء القليل من الجبر، نحصل على

$$\int dt = -\sqrt{R(c+g)} \times \int \frac{\sin(\phi)\,d\phi}{\sqrt{\{c - g\sin^2(\phi) + c\cos^2(\phi)\}\{c + g\sin^2(\phi) - c\cos^2(\phi)\}}}$$

$$= -\sqrt{R(c+g)} \times \int \frac{\sin(\phi)\,d\phi}{\sqrt{\{c[1+\cos^2(\phi)] - g\sin^2(\phi)\}\{c[1-\cos^2(\phi)] + g\sin^2(\phi)\}}}$$

$$= -\sqrt{R(c+g)} \times \int \frac{\sin(\phi)\,d\phi}{\sqrt{\{c[2-\sin^2(\phi)] - g\sin^2(\phi)\}\{c\sin^2(\phi) + g\sin^2(\phi)\}}}$$

$$= -\sqrt{R(c+g)} \int \frac{\sin(\phi)\,d\phi}{\sqrt{\{2c - c\sin^2(\phi) - g\sin^2(\phi)\}(c+g)\sin^2(\phi)}}$$

$$= -\sqrt{R} \int \frac{d\phi}{\sqrt{2c - (c+g)\sin^2(\phi)}} = -\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2c}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (\frac{c+g}{2c})\sin^2(\phi)}}.$$

وبذلك، بتحديد الثابت k^2، نحصل على

$$\int dt = -\sqrt{\frac{R}{2c}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\phi)}}, \quad k^2 = \frac{c+g}{2c}.$$

وعند هذه النقطة لا يمكننا تجنب مسألة حدود التكامل. وإليك كيفية الحصول عليهم للتكاملين. عندما t=0 نحن نعلم أنّ $\dot{s}$=0، ومن ثم، بما أنّ $\dot{s}$ = x، نحن نعلم من $x = \sqrt{R(c+g)}$ أنه عند t =0 يكون لدينا cos(ø) = 0. أي أنّ، $\phi = \frac{\pi}{2}$ عندما t = 0. الآن، ماذا تساوي $ø$ عند انتهاء النصف الأول من الرحلة، أي أنّ، عندما $t = \frac{T}{2}$؟ لنسمي هذه القيمة $ø_1$. من عملنا السابق نعلم أنّ $\dot{s}$ هي في أقصى قيمة لها عند ذلك الوقت، وبذلك

$$\dot{s}_{\max} = \sqrt{R(c+g)}\cos(\phi),$$

التي تقول[5] إنّ

$$\phi_1 = \cos^{-1}\left\{\sqrt{\frac{\dot{s}^2_{\max}}{R(c+g)}}\right\}.$$

إذا قمنا بتربيع الطرفين لمعادلة $\dot{s}_{\max}$، باستخدام التعبير في الإطار (C) مع إدخال $s = \frac{D}{2}$ لأنّ هنا تظهر $\dot{s}_{\max}$، ولدينا

$$\dot{s}_{\max}^2 = R\left[g - c\sin\left\{\sin^{-1}\left(\frac{g}{c}\right) - \frac{D}{R}\right\}\right].$$

لذلك، بوضع الحدود، نحصل على

$$\int_0^{T/2} dt = \frac{T}{2} = -\sqrt{\frac{R}{2c}}\int_{\pi/2}^{\phi_1}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}}.$$

أو، أخيرا،

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2R}{c}}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}} - \int_0^{\phi_1}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}}\right].\\ k^2 &= \frac{c+g}{2c}.\\ \dot{s}_{\max}^2 &= R\left[g - c\sin\left\{\sin^{-1}\left(\frac{g}{c}\right) - \frac{D}{R}\right\}\right].\\ \phi_1 &= \sin^{-1}\left\{\sqrt{1-\frac{\dot{s}_{\max}^2}{R(c+g)}}\right\}.\end{aligned}} \qquad \text{(E)}$$

لنصف القطر $R = 2.09 \times 10^7$ قدم، $c = 40$ قدم/ ثانية تربيع، و $g = 32.2$ قدم/ثانية تربيع نجد أنّ $\sqrt{\frac{2R}{c}} = 1.022$ ثانية وأنّ ($k = 0.95$) $k^2 = 0.9025$. وأيضا، كما وجدنا سابقا، للقطر D = 10 آلاف ميل (رحلة ملبورن، أستراليا/ مدينة نيويورك) أنّ $\dot{s}_{\max} = 38{,}830$ قدم/ثانية، وبذلك $\phi_1 \approx 0$. والآن، كلا التكاملات في (E) هي ما يسميها علماء الرياضيات تكاملاً ناقصاً من النوع الأول *Elliptic integrals of the first kind*، وهي دوال جديدة كليا (من حدين، k وزاوية الحد العلوي). ولا يمكن التعبير عنهم بتعابير الدوال "العادية" Ordinary' func tions للرياضيات، مثل الدوال الأسية Exponentials والمثلثية Trig functions والجذور التربيعيةSquare roots (أو من قوى أخرى). يجب أن تُحسب رقميا (التي تبحث عنها في الجداول) أو تقيمها بخوارزمية مُرمّزة باستخدام الحاسوب عند طلبها. وقد استخدمت آلة حاسبة[6] مجانية من شبكة الإنترنت، وحصلت على الناتج $T = 1{,}022\ (2.59 - 0)$ ثانية = 2,647 ثانية = 44.1 دقيقة. وبالتأكيد يتغلب ذلك على رحلة ذات 20 ساعة من الانحشار بمقعد الدرجة السياحية في طائرة نفاثة مع المقعد المائل أمامك لراكب نائم (وربما يشخر) في حضنك.

حسنا، كان ذلك ممتعا (أليس كذلك؟)، ولكن من سيبني فعلا أنبوب النقل الحلقي العظيم بين مدينة نيويورك وملبورن، أستراليا؟ فكر في المحيط العميق حقا بين هذين المدينتين، حيث يجب أن تتوفر أبراج دعم سميكة! وعلى الأرجح أنابيب نقل تصل بين مدينة نيويورك وبوسطن وواشنطن العاصمة، فإنّ هذه الأنابيب ستكون كليا فوق الأرض، وإقامة أبراج لدعم (أو حفر أنفاق ضحلة أسفل السطح) ستكون على الأقل مهمة يسهل العمل بها.

ويسافر أيضا العديد من الناس بصورة دورية بين ساحلي الولايات المتحدة، وسأدعك تتأكد من أنّ رحلة في أنبوب النقل بين، على سبيل المثال، مدينة نيويورك ولوس أنجلوس

(2,450 ميل) ستتطلب 23.3 دقيقة وستصل سرعة قصوى تبلغ 3.84 ميل/ثانية، مقارنة بأكثر من 300 دقيقة بواسطة الطيران التجاري. وإذا كنت تستمتع حقا بالضغط على أزرار الأرقام على آلتك الحاسبة، إليك أربعة أمثلة أخرى للتأكد منها.

جدول 19.1
مثال أوقات أنبوب النقل

A	B	D (ميل)	$\dot{s}_{max}$ (ميل/ثانية)	T (دقائق)
منسك	بكين	1,814	3.22	20.3
باريس	موسكو	1,550	2.94	18.8
باريس	برلين	546	1.64	11.3
لندن	باريس	213	0.99	6.9

سيُعجب السياح الروس والصينيون بالسطر الأول كثيرا. و السطر الأخير تحديدا مثير للإعجاب عند مقارنته بقطار يوروستار Eurostar، الذي يتطلب 135 دقيقة لرحلة لندن/ باريس. مع أنبوب النقل يمكنك أن تكون في لندن عند 10:00 صباحا وفي باريس قبل 10:07 صباحا. مدهش، حقا!

"كتكليف" أخير، قد تجد من المثير للاهتمام مقارنة أنبوب النقل بنظام الأنابيب عالية السرعة المقترحة التي تربط سان فرانسيسكو ولوس أنجلوس، المسمى الحلقة الفائقة Hyperloop.[7]

ملاحظات

1. يمكنك العثور على مناقشة رياضياتية لمثل هذه الأنفاق (مع تعليقات تاريخية) في كتابي لحاف السيدة بيركنس الكهربائي Mrs. *Perkins's Electric Quilt*, Princeton University Press, 2009, pp. 203–214.
2. William A. Allen, "Two Ballistic Problems for Future Transportation," *American Journal of Physics*, February 1953, pp. 83–89. وهي ورقة صعبة القراءة بالنسبة إلى الطلبة المبتدئين. وتحتوي على معادلات مثل $\int_0^s f(s)\,ds$، وفي حين معرفة المحلل المتمرس معناها، فستكون بالنسبة إلى طالب مبتدئ في الحسبان غير مفهومة (حد التكامل s متغير من صفر إلى نفسه، بحد ذاته من دون معنى). والعرض الذي قدمته هنا هو نسخة موسعة من عرض آلن ومعاملة رياضياتية مختلفة نوعا ما. والنتيجة النهائية، مع ذلك، هي نفسها.

3. الاستثناء الوحيد لهذه العبارة هي إذا كانت النقطتان هما نقطتي النهاية لقطر الدائرة، وعندها هناك عدد لانهائي من المسارات الحلقية العظيمة، وجميعها متساوية في الطول بطول نصف محيط الاستواء.
4. بالطبع هذه "الطريقة" تعتمد على امتلاك جدول من التكاملات التي تحتوي على إدخال تكامل معين الذي أثار اهتمامك. وإذا لم يكن كذلك، يجب عليك إيجاد حل التكامل بنفسك. "عمل" التكامل له تاريخ طويل في الرياضيات ومليء بالأحداث: انظر على سبيل المثال، كتابي داخل التكاملات المثيرة للاهتمام: *Inside Interesting Integrals*, Springer, 2015, and George Boros and Victor Moll, *Irresistible Integrals*, Cambridge University {P]ress, 2004..
5. في ورقة آلن Allen $\phi_1 = \sin^{-1}\left\{\sqrt{1 - \frac{s_{max}^2}{R(c+g)}}\right\}$، ولكنه من السهل بينا أنّ التعبيرين هذين متعادلان. (تلميح: ارسم مثلثاً قائم الزاوية $\emptyset_1$ مع كأحد الزوايا الحادة وبعدها طبق نظرية فيثاغورس وتعاريف sine و cosine)، ولكن تعبير آلن مُفضّل كما في الحالات حين تكون $\emptyset_1$ قريبة جدا من الصفر أنه من المضمون عدم فشلها بسبب دور التشويش (قد ينتج من مقلوب cosine حجة أكبر بقليل من 1، مما ينتج خطا).
6. في keisan.casio.com/exec/system/ 1244989500. يظهر التكامل الناقص في جميع الأنحاء في الفيزياء المتقدمة وكما رأينا هنا، في الفيزياء البسيطة، أيضا. (يمكنك العثور على المزيد من النقاشات عن ظهورها في الفيزياء في داخل التكاملات المثيرة للاهتمام *Inside Interesting Integrals* (انظر: ملاحظة 4 صفحات 212-219). وفي الفصل الأخير من هذا الكتاب سأريك أيضا ظهور آخر بتكامل ناقص، في حالة أبسط من مسألة أنبوب النقل.
7. James Vlahos, “Hyped Up,” Popular Science, July 2015, pp. 32–39.

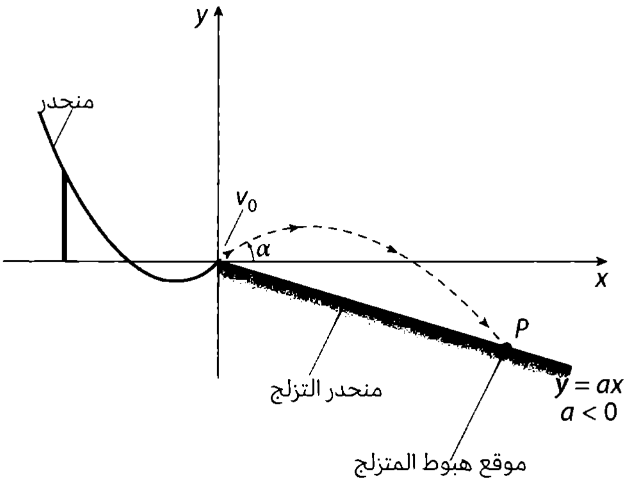
20 قذف جسدك في الفضاء

"يتهرب الجبان، ولكن الرجل الشجاع يختار الخطر".
- يوربيدس *Euripides* (نحو *400* قبل الميلاد)، الذي أضاف قائلا إنّ الشجاع غالبا ما يموت شابا.

دائما يؤدي الناس العديد من الأمور الحمقاء، من رمي السهام على الماموث Mammoth الصوفي وبعدها الهرب كالمجانين من الوحش الساخط، إلى القفز من على جسور بارتفاع 500 قدم بحبال مطاطية رقيقة مربوطة بكاحلهم لتسحبهم بقوة للتوقف بعد السقوط 499 قدم (بدلا من 501). ففي هذا الفصل، إضافة إلى قفز حبل البنجي Bungee- Cord Jumping، سنناقش أمرين آخرين أقل خطورة ولكنها نشاطات بشرية شائعة ولها علاقة بقذف الجسم في الفضاء: حركة التأرجح والإفلات "الطرزانية" Tarzan من حبل معلق للتحليق بسرعة عبر مستنقع مليء بالأفاعي السامة (سيكون إنديانا جونز Indiana Jones مهتما بشكل خاص بنتيجتنا لهذا الموقف!) وقفز التزلج Sski jump. وسنستخدم في تحليلاتنا الثلاثة الكثير من الفيزياء البسيطة التي طورناها فيما سبق من هذا الكتاب، إضافة إلى أشياء جديدة لم نرها من قبل.

قفز التزلج

هذه المسألة، أبسط المسائل الثلاث، موصوفة في الأبعاد الهندسية الموضحة في الشكل 20.1. يتسارع متزلج أسفل منحدر الإقلاع، المبني على شكل منحى يتصاعد من الأسفل إلى الأعلى عند نهايته ليتمكن المتزلج من القفز من نهاية المنحدر (عند مركز نظامنا الإحداثي) بزاوية α بسرعة معينة v_0. ويندفع عندها المتزلج عبر الفضاء في مسار قطعي مكافئ Parabolic.



رسم توضيحي 20.1 أبعاد هندسية لمنحدر التزلج

(انظر: الشكل 18.1) حتى يهبط على منحدر التزلج عند النقطة P. يبدأ منحدر التزلج من المركز وله ميل سالب a، كما هو مبين في الشكل. ومشكلتنا هي في تحديد ما الزاوية α التي نحصل معها على أقصى طول للقفز (أي أننا نريد أن نجعل الإحداثي السيني x للنقطة P أطول ما يمكن).[1] وسنتجاهل أي تأثير لسحب لمقاومة الهواء ونعتبر أنّ الجاذبية هي القوة الوحيدة التي تؤدي دورا هنا.

ستتذكر أننا في الفصل 18 قد استنتجنا المعادلة لمسار القطع المكافئ لمقذوف يترك نقطة المركز بزاوية α بسرعة v_0:

$$y = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2.$$

ويهبط متزلجنا على منحدر التزلج (مع معادلة $y=ax$) عند P، وبهذا يلبي الإحداثي السيني للنقطة P

$$ax = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2,$$

أو

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 = x[\tan(\alpha) - a].$$

إضافة إلى الحل البسيط 0= x، لدينا

$$x = \frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)[\tan(\alpha)-a]}{g} = \frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)\left[\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}-a\right]}{g}$$
$$= \frac{2v_0^2}{g}\left[\cos(\alpha)\sin(\alpha)-a\cos^2(\alpha)\right].$$

ومن ثم،

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\left[\{\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\}+a\,\{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\}\right].$$

وبتذكر أن المعادلة في الزوج الأول من الأقواس المموجة هي $\cos(2\alpha)$، وأنّ المعادلة في الزوج الثاني من الأقواس المموجة هي $\sin(2\alpha)$، يصبح لدينا

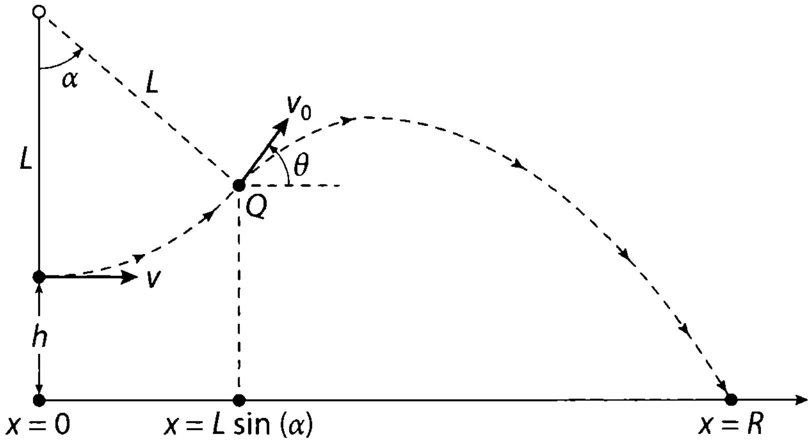
$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}[\cos(2\alpha)+a\,\sin(2\alpha)].$$

وبمساواة هذه المعادلة بالصفر للحصول على أقصى قيمة للإحداثي السيني x، نحصل على

$$\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \tan(2\alpha) = -\frac{1}{a}, \quad a < 0.$$

إذا، كانت $a = 0$ ("الميل" ليس مائلا وإنما أفقي)، سنحصل على $\alpha = 45°$ المتوقعة للقفز لأقصى مسافة. بينما إذا $a = -1$ (معطية ميلان شديد $45°$) تظهر قصى مسافة للقفز للزاوية $\alpha = 22.5°$. ولاحظ أنّ هذه النتيجة، لأكبر α، مستقلة عن v_0 (هي أفضل زاوية بالنسبة إلى جميع المتزلجين بأي قدر من القوة ممن يستخدمون مرفق القفز هذا بالتحديد)، وهي دالة لشدة انحدار ميل الهبوط. وكلما زاد انحدار الميل، قلّت α.

في الحد $a = -\infty$ (مما يعني أنّ "الميل" منحدر رأسي، ولدينا $\alpha = 0$، مما يعني أنّ المتزلج ينطلق أفقيا مباشرة من المنحدر الموازي للمحور السيني x. فعليا، لن يضرب المتزلج "المنحدر" وإنما يستمر ببساطة بالحركة إلى الأمام، على طول فترة سقوطه رأسيا. إذا وضعت $\alpha = 0$ و $a = -\infty$ في معادلة الإحداثي السيني للنقطة P، يمكنك الحصول على $x = \infty$. هذا كله صحيح نظريا، ولكن في العالم الحقيقي ينتهي المطاف بالمتزلج في قاع وادي عميق جدا.

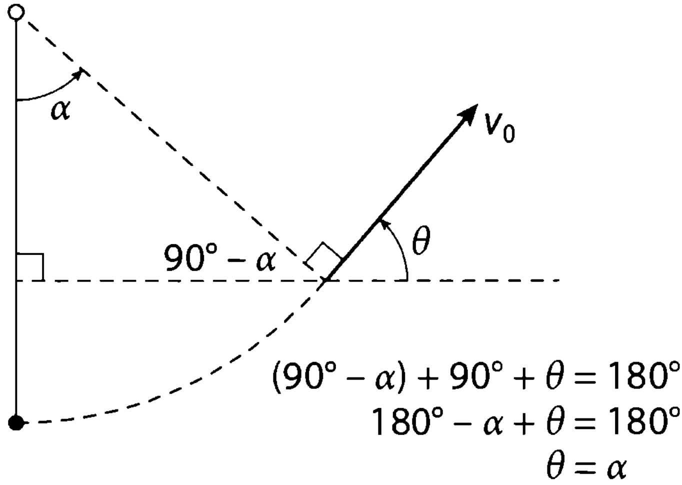


الرسم التوضيحي 20.2 أبعاد تأرجح طرزان

أرجحة طرزان

في هذه المسألة لدينا رجل/طرزان أو إنديانا جونز، على سبيل المثال - ويُعتبر ككتلة نقطية m، يركض باتجاه حبل من ألياف نباتية بطول L متدلية إلى الأسفل من جذع شجرة عالية. وسنسمي النقطة التي تتدلى فوقها النهاية السفلية لحبل الألياف بمركز النظام الإحداثي السيني والصادي x, y–coordinate system، كما هو مبين في الشكل 20.2. وتبعد النهاية السفلى لحبل ألياف مسافة h فوق $x = 0$. وعندما يصل الرجل إلى $x = 0$ فإنه يتحرك بسرعة v، وفي تلك اللحظة يمسك نهاية الحبل ويتأرجح خارجا وإلى الأعلى مثل كرة البندول. وفي نقطة ما، Q، عندما يدور الحبل عبر زاوية α، ويفلت الحبل وبعدها ينحني عبر الهواء بمسار قطع مكافئ حتى يصل إلى المحور السيني عند $x = R$. وسؤالنا بسيط: ماهي زاوية الإفلات α التي تعطي أكبر قيمة للمسافة R؟

ففي التحليل التالي سنهمل مقاومة الهواء (كما في مسألة قفزة المتزلج) وسنفترض أنّ الحبل يتأرجح من جذع شجرته من دون احتكاك. وسنكتب v_0 كسرعة الرجل عند نقطة الإفلات، Q، ونستخدم حقيقة الأبعاد الهندسية أنّ الزاوية α الذي دار به الحبل عند نقطة الإفلات هي الزاوية θ التي يصنعها متجه سرعة الرجل مع المحور الأفقي. ويوضح الشكل 20.3 الوضع، الذي يتبع من مشاهدة، عند الإفلات، متجه سرعة الرجل عمودي على الحبل.



الرسم التوضيحي 20.3 لماذا $\alpha = \theta$ في الشكل 20.2

للبدء بتحليلنا،[2] في اللحظة التي يصل فيها الرجل $x = 0$ ويمسك بالحبل، تكون لديه طاقة كامنة تساوي صفر وطاقة حركة تساوي $\frac{1}{2}mv^2$. فإذا تأرجح الحبل عبر زاوية α، يرتفع الرجل عموديا عبر المسافة

$$L - L\cos(\alpha)$$

وبذلك يكسب طاقة كامنة

$$mgL\,\{1 - \cos(\alpha)\}$$

وتأتي هذه الطاقة من طاقته الحركية وبذلك، عندما تأرجح الحبل خلال زاوية α، كان الرجل يتحرك بسرعة v_0 وله طاقة حركية

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgL\,\{1 - \cos(\alpha)\}\,.$$

وإذا أفلت الرجل قبضته على الحبل عند النقطة (Q)، إذن ستكون سرعته عند بدء منحى القطع المكافئ عبر الهواء هي:

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2gL\,\{1 - \cos(\alpha)\}}$$

عند الزاوية θ من المحور الأفقي. ستكون إحداثياته عند Q، عند تلك اللحظة، هي $x = L\sin(\alpha)$ و $y = L\,\{1 - \cos(\alpha)\}$.

ومن الواضح أنّه اعتمادا على سرعة ركض الرجل في اللحظة التي يمسك فيها بالحبل، تُعطى الزاوية التي يستطيع الحبل التأرجح بها، بحد أقصى،

$$\alpha_{\max} = \cos^{-1}\left\{1 - \frac{v^2}{2gL}\right\}.$$

هذه الزاوية التي تتحول فيها كل طاقته الحركية إلى طاقة كامنة. وأكبر زاوية α ممكنة وذات اهتمام فعلي، هي بالطبع، °90[3] وبذلك إذا $v^2 > 2gL$، إذا كل قيم زاوية الإفلات ذات الاهتمام الفعلي ممكنة. وإذا كانت $v^2 < 2gL$ إذا كل قيم زاوية الإفلات ذات الاهتمام الفعلي تكون في الفترة $0 < \alpha < \alpha_{\max}$. لحبل بطول 20 قدماً على سبيل المثال، تكون السرعة الحرجة v التي تفصل بين الحالتين هي:

$v = \sqrt{2 \times 32.2 \times 20}$ ثانية/ قدم≈ 36 قدم/ثانية

وهذا سريع جدا، مقابل الركض بسرعة مسافة 100 ياردة بأقل من 8.4 ثانية، أسرع بثانية واحدة (بينما أكتب) من الرقم القياسي العالمي! وبطريقة أكثر منطقية ليصل الرجل إلى هذه السرعة هي ببساطة بأن يفعل مثل ما اشتهر طرزان بفعله - بدلا من الركض، تخيل أنه ابتدائيا موجود في أعلى شجرة على منصة، ممسكا بحبل ممدود بشكل كامل، ويُطلق جسده في الهواء. حين يعبر عبر المركز يمكنه بسهولة التحرك بسرعة 36 قدم/ثانية أو أكثر.

والآن، ضع كل ذلك جانبا للحظة وتذكر مرة أخرى سؤال مسار القطع المكافئ لمقذوف يترك نقطة المركز بزاوية α بسرعة v_0:

$$y = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2.$$

وقد استعملنا هذه المعادلة بهذا الشكل في تحليل قفزة التزلج، ولكن الأشياء هنا مختلفة قليلا. الزاوية α والسرعة v_0، هما مثل السابق ولكن الآن الرجل لا يترك نقطة المركز،

$$h = L\{1 - \cos(\alpha)\}$$

أعلى المحور السيني عندما يترك الحبل. وهذا يسهل تقريبه، على الرغم من ذلك. تخيل أن الرجل يترك المركز، والآن نريد معرفة قيمة x عندما $y = -h$ أي، نحل المعادلة

$$-h = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2$$

لإيجاد x. وهذا سهل العمل مع صيغة المعادلة التكعيبية، وسأدعك تتأكد من أنّ الإجابة هي:

$$x = \frac{v_0^2}{2g}\left[\sin(2\alpha) + \sqrt{\sin^2(2\alpha) + \frac{8hg}{v_0^2}\cos^2(\alpha)}\right].$$

تأكد من أهمية هذه x واضحة في مخيلتك - هي المسافة بين الإحداثي السيني للنقطة Q و $R = x$. لذلك، لإيجاد قيمة R، نفسها، يجب أن نضيف المسافة الأفقية (الإحداثي السيني للنقطة Q) التي يتأرجح الرجل فيها على الحبل قبل أن يفلته:

$$R = L\sin(\alpha) + \frac{v_0^2}{2g}\left[\sin(2\alpha) + \sqrt{\sin^2(2\alpha) + \frac{8hg}{v_0^2}\cos^2(\alpha)}\right].$$
$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2gL\{1 - \cos(\alpha)\}}.$$

لإيجاد زاوية الإفلات α التي تزيد من قيمة R، قد يقول عالم رياضيات بحتة "لامشكلة، فقد أجعل $\frac{dR}{d\alpha} = 0$ وأوجد α". حسنا، يمكنك عمل ذلك، إذا كنت محبا للعذاب - ولكنني سأتخذ نهجا مختلفا وسأستخدم الحاسوب لإنشاء رسم بياني للقيمة R مقابل α وببساطة أرى أن يرتفع R ارتفاعا حادا. ولكن، لجعل عملنا العددي مفيدا بأقصر صورة ممكنة ، لنقم بتغيير Normalize معادلة R أولا إلى معادلة تشتمل على متغيرات عديمة الأبعاد. (تذكرأننا استعملنا هذه الطريقة في الفصل 16) وباتباع خطوات ورقة حديثة،[4] استعملنا طولا "طبيعيا" L (طول الحبل) وسرعة "طبيعية" $\sqrt{2gL}$ (تفحص التعبير الذي استنتجناه للسرعة v_0). لذلك، نحدد المتغيرات

$$w = \frac{v}{\sqrt{2gL}}, \quad s = \frac{h}{L}, \quad a = \cos(\alpha).$$

بعدها،

$$\frac{R}{L} = \sin(\alpha) + \frac{v_0^2}{2gL}\left[\sin(2\alpha) + \sqrt{\sin^2(2\alpha) + \frac{8hg}{v_0^2}\cos^2(\alpha)}\right].$$

و، بما أنّ (كما يمكنك التأكيد)

$$\sin(\alpha)=\sqrt{1-a^2},\quad \sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)=2a\sqrt{(1-a^2)},$$

$$\frac{v_0^2}{2gL}=w^2-1+a,\quad \frac{8hg}{v_0^2}\cos^2(\alpha)=\frac{4sa^2}{w^2-1+a},$$

يصبح لدينا

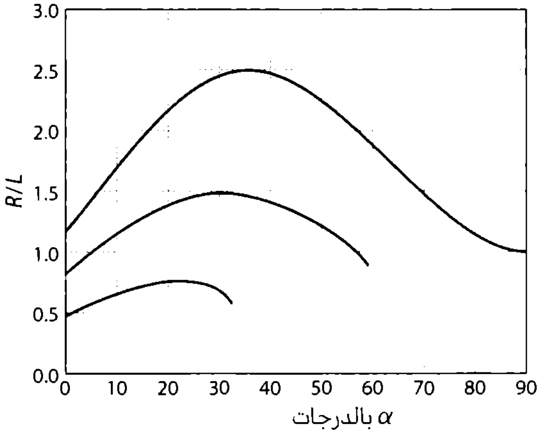
$$\frac{R}{L}=\sqrt{1-a^2}+2a\left(w^2-1+a\right)\left[\sqrt{1-a^2}+\sqrt{(1-a^2)+\frac{s}{w^2-1+a}}\right].$$

وقيمة "نموذجية" للقيمة s قد تكون $\frac{1}{3}$ (على سبيل المثال، حبل بطول 15 قدماً ونهايته السفلى ترتفع 5 أقدام فوق الأرض في أسفل نقطة يصل إليها عند التأرجح). لحبل بطول 15 قدماً،

$\sqrt{2gL}=\sqrt{2\times 32.2\times 15}$ قدم/ثانية = 31 قدم/ثانية

إذن، إذا اخترنا $w = 1$، إذا 0.7، و 0.4، سنحصل على سرعة طرزان عندما يمسك بالحبل 31 قدم/ثانية، 21.7 قدم/ثانية، و12.4 قدم/ثانية على التوالي. ويبين الشكل 4.20- ثلاثة رسوم بيانية للقيمة $\frac{R}{L}$ مقابل α فـ α تتغير من 0 إلى $\alpha_{\max}$: والرسم العلوي لعندما تكون $w = 1$، والرسم الذي في المنتصف لعندما تكون $w = 0.7$، والرسم السفلي هو لعندما تكون $w = 0.4$.

ففي الشكل 20.4 نرى لكل رسمة يوجد ارتفاع حاد وواضح (الارتفاعات عريضة، برغم ذلك مبينة أنّ α معينة يستخدمها طرزان ليست حرجة لتنقله عبر المستنقع) وأنّ الزاوية التي تعطي أقصى مدى تزداد بزيادة w (سرعته عندما يمسك بالحبل). ويظهر المدى الأقصى في جميع الرسوم البيانية عند زاوية إقلاع أقل من 45°، عند $w = 0.7$، على سبيل المثال، زاوية الإقلاع المُثلى هي 30° فقط.

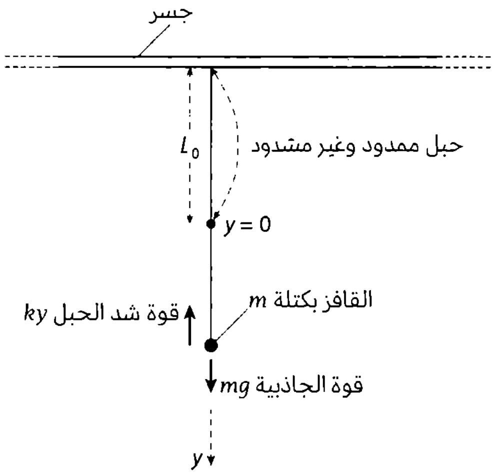


رسم توضيحي 20.4 المدى المُعيَّر مقابل زاوية الإقلاع

والآن للقراء الذين يتساءلون إن كانت هذه مشكلة حقا للحياة اليومية (على أي حال، كم عدد المستنقعات التي تأرجحت عبرها خلال السنوات العشر الماضية؟) اسمح لي بأن أذكرك أنّه كل واحد منكم تأرجح مثل طرزان في وقت ما. فقط تذكر عندما كنت طفلا في ساحة لعب، على أرجوحة، تزيد من ارتفاعها إلى أعلى وأعلى. وبعدها عند آخر أرجحة أمامية قبل أن ترجع للمنزل لتناول العشاء، قذفت نفسك خارج الأرجوحة وهبطت على رمل الحوض المحيط بك. هل تتذكر فعل ذلك؟ كان ذلك تأرجح طرزان!

قفز حبل البنجي

يربط مُغامر (نعتبره ككتلة نقطية m) طرف حبل طويل ومطاطي عديم الكتلة بكاحله، والطرف الآخر في نهاية عمود جسر عدة مئات من الأقدام فوق ممر صخري، ويقفز في الهواء. بينما يسقط القافز يمتد الحبل خلفه حتى ينزل مسافة تساوي طول الحبل، L_0. ويستمر بالسقوط لأنّ الحبل يبدأ بالتمدد، سنفترض أنّ الحبل يمتثل لقانون هوك *Hook's Law5*[5] أثناء تمدده. أي أنّ، إذا حددنا المحور الرأسي بالمحور y يزيد بالموجب باتجاه الأسفل (انظر: شكل 20-5) ونحدد y=0 (عند الزمن t= 0) عند النقطة التي يبدأ فيها الحبل بالتمدد، إذن الشد في الحبل (باتجاه الأعلى في اتجاه y السالب باتجاه الجسر) هو، للقيمة k ثابت موجب، ومعطى ky. هذه القوة التي في الاتجاه عكس الجاذبية، تبين السقوط، وستوقف القافز في نهاية المطاف، وبعدها تسحبه إلى الأعلى.



رسم توضيحي 20.5 الأبعاد الهندسية لقفزة البنجي

هناك إثارة مزدوجة عند عمل هذه المخاطرة (في اعتقادي) الجنونية: عدم التحطم على الصخور في الأسفل، واختبار عجلة أكبر من عجلة الجاذبية. فعلا، هذا السؤال الذي سنجيب عنه هنا ببعض الفيزياء البسيطة- ماهي أقصى عجلة يختبرها القافز؟ كما سترى، يمكنها أن تكون أكبر جدا من $g1$. بينما يسقط القافز وحتى يبدأ الحبل بالتمدد، القوة الوحيدة التي يشعر بها هي قوة الجاذبية الأرضية المتجه إلى الأسفل mg. ولكن حين يبدأ الحبل بالتمدد سيشعر أيضا بقوة الشد، المتجه إلى الأعلى، للقوة ky، وبذلك تصبح القوة الكلية على القافز لقيمة $y \geq 0$

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ky,$$

وبذلك،

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = g, \quad y \geq 0.$$

هذه معادلة تفاضلية شائعة ومهمة غالبا يصادفها المهندسون والفيزيائيون والرياضياتيون، وحلها معروف جيدا لديهم. وربما يكون هذا فوق مستوى أغلب مناهج الرياضيات التي تُدرّس في المرحلة الثانوية، ومع ذلك، سأقضي قليل من الوقت لأريك كيفية حلها - وليس من الصعب فعل ذلك.

لنبدأ بافتراض أنّ الصيغة العامة للحل هو مجموع الدالة المتغيرة مع الزمن والثابت.

ويبدو أنّ ذلـك يغطـي العديـد مـن القواعـد! إذا كانـت C هـي الثابـت، إذا بوضـع $y = C$ في معادلـة التفاضـل يُعطينا

$$\frac{k}{m}C = g,$$

وعندنا الثابت:

$$C = \frac{mg}{k}.$$

إذاً بكتابة جزء الحل المتغير مع الزمن كدالة $f(t)$ يعطينا الحل الكلي

$$y(t) = \frac{mg}{k} + f(t).$$

إذاً، من ثم أدخلنا هذا التعبير في المعادلة التفاضلية، نحصل على

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{k}{m}\left[\frac{mg}{k} + f(t)\right] = g,$$

وبذلك تكون لدينا معادلة تفاضلية للدالة $f(t)$ فقط:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{k}{m} f(t) = 0,$$

أي أنّ، $f(t)$ هـي دالـة، فـإنّ مشـتقها الثانـي هو نسـخة مدرّجة من نفسـها. هل تسـتطيع تذكر دوال لهـا هـذه الخاصيـة؟ بالطبع تسـتطيع-الجيب sines وجيب التمام cosines![6]

لذلك، افترض (مع A و ω ثوابت) أنّ

$$f(t) = A\cos(\omega t)$$

بعدها،

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

وباستبدال هذا التعبير في المعادلة التفاضلية للدالة $f(t)$، نحصل على

$$-A\omega^2 \cos(\omega t) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t),$$

التي تقول

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

ويمكننا أن نفترض أيضا

$$f(t) = B \sin(\omega t)$$

وبذلك، مرة أخرى، وصلنا إلى

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

وهكذا، بشكل عام، يمكننا كتابة

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

وحلنا الكامل للمعادلة $y(t)$ هي:

$$y(t) = \frac{mg}{k} + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

والآن، ما هما A و B؟ حسنا، يمكننا إيجاد A لأننا نعلم أنّه عند $t = 0$ لدينا $y(0) = 0$، وبذلك

$$0 = \frac{mg}{k} + A,$$

التي تقول إنّ

$$A = -\frac{mg}{k}.$$

وهكذا،

$$y(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

أو

$$y(t) = B\sin(\omega t) + \frac{mg}{k}[1 - \cos(\omega t)].$$

ولإيجاد B نكتب

$$\frac{dy}{dt} = B\omega\cos(\omega t) + \frac{mg}{k}\omega\sin(\omega t).$$

ويمكننا استعمال هذا التعبير بملاحظة أنّه إذا كانت سرعة القافز مع بداية تمدد الحبل عند زمن $t = 0$ هي v_0، ثم

$$\frac{dy}{dt}|_{t=0} = v_0 = B\omega,$$

ومن ثم

$$B = \frac{v_0}{\omega},$$

مما يعطينا

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{mg}{k}[1 - \cos(\omega t)].$$

ويمكننا إيجاد v_0 بمعرفة أنّه إذا سقط القافز لمسافة L_0 في فترة زمنية T، إذا[7] L_0، إذاً، $L_0 = \frac{1}{2}gT^2$. فستكون السرعة في نهاية الفترة الزمنية T هي:

$$gT = g\sqrt{\frac{2L_0}{g}} = \sqrt{2gL_0} = v_0.$$

وعجلة القافز عند $y > 0$ هي:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v_0}{\omega}\left\{-\omega^2\cos(\omega t)\right\} - \frac{mg}{k}\omega^2\sin(\omega t) = -v_0\omega\cos(\omega t) - \frac{mg}{k}\omega^2\sin(\omega t)$$
$$= -\sqrt{2gL_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\omega t) - \frac{mg}{k}\left(\frac{k}{m}\right)\sin(\omega t)$$
$$= -\left[\sqrt{\frac{2gL_0k}{m}}\cos(\omega t) + g\sin(\omega t)\right].$$

وهذه العجلة هي للصيغة العامة

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t),$$

مع

$$a = -\sqrt{\frac{2gL_0k}{m}}, \quad b = -g.$$

وسأدعك تبين، باستعمال التلميح الموجود في الملاحظة 8،[8] أنّ مقدار العجلة القصوى هي:

$$\max\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{2gL_0k}{m} + g^2} = g\sqrt{1 + \frac{2L_0k}{mg}}.$$

والآن لإنهاء هذا التحليل، ولوضع نتيجتنا للعجلة القصوى في صيغة يسهل تقديرها، لنلقِ نظرة أكثر تفصيلا على الثابت k، بما أنّ قوة الشد للحبل ممدود عند $y > 0$ هي $F=ky$، فإنّ الحبل المطاطي الذي يتمدد يخزن طاقة E. ولنجعل الطول الأقصى للحبل أثناء القفز L_m. وبعدها، بما أنّ الحبل يتمدد بمقدار $L_m - L_0$، فالطاقة في الحبل الممدود هي:

$$E = \int_0^{L_m-L_0} F\,dy = \int_0^{L_m-L_0} ky\,dy = \frac{1}{2}ky^2\Big|_0^{L_m-L_0} = \frac{1}{2}k\,(L_m - L_0)^2.$$

وتأتي هذه الطاقة من نقصان الطاقة الكامنة للقافز، أثناء السقوط، بما أنّه يسقط مسافة L_m من النقطة التي يبدأ فيها الحبل بالتمدد، يكون النقصان في الطاقة الكامنة هو mgL_m. وبذلك

$$\frac{1}{2}k\,(L_m - L_0)^2 = mgL_m.$$

وهكذا،

$$k = \frac{2mgL_m}{(L_m - L_0)^2},$$

ومن ثم،

$$\begin{aligned}\max\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right| &= g\sqrt{1 + \frac{2L_0\frac{2mgL_m}{(L_m-L_0)^2}}{mg}} = g\sqrt{1+\frac{4L_mL_0}{(L_m-L_0)^2}}\\ &= g\frac{\sqrt{(L_m-L_0)^2+4L_mL_0}}{L_m-L_0} = g\frac{\sqrt{L_m^2+2L_mL_0+L_0^2}}{L_m-L_0}\\ &= g\frac{L_m+L_0}{L_m-L_0}.\end{aligned}$$

أو، في النهاية،

$$\max\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right| = g\frac{\frac{L_m}{L_0}+1}{\frac{L_m}{L_0}-1}.$$

هذه النتيجة ذات المظهر المبسط واضحة تمام. إذا $L_m = 2L_0$، أي إذا تمدد الحبل مرتين أطول من طوله غير الممدود أثناء القفز، إذن

$$\max\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right| = 3g.$$

في حين أنّه إذا تمدد الحبل بمقدار 50%، فقط أي أنّه إذا $L_m = \frac{3}{2}L_0$، إذن

$$\max\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right| = 5g.$$

كلما قل التمديد، كلما زادت العجلة القصوى. عند حد عدم التمديد نهائيا ($L_m = L_0$)، نحصل على نتيجة مروعة. بافتراض، لتوضيح ذلك، أنّ القافز ربط كاحله بسلسلة صلبة

$$\max\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right| = \infty.$$

وهي الرياضيات التي تصف الهزة العنيفة جدا عند التوقف المفاجئ الهامدة (حرفيا) التي سيتعرض لها القافز في اللحظة التي تصبح فيها السلسلة ممدودة بشكل كامل.

والآن، بعض الكلمات الأخيرة عن التحليل الذي أخذتك من خلاله. أولا، ما وصفته قد حفّزته مسألة تحدي في المجلة الأمريكية للفيزياء *American Journal of Physics*.[9] ثانيا، بعد بضع سنوات ظهرت مقالة لطيفة[10] في مجلة معلم الفيزياء *The Physics*

Teacher، والتي نبهت قليلا مؤلف مسألة في المجلة الأمريكية للفيزياء لأنه ارتكب خطأ-انتقاد باعتقادي لا مبرر له. لن أخوض في التفاصيل هنا، ولكن مسألة المجلة الأمريكية للفيزياء ذكرت تحديدا أنّ الحبل عديم الكتلة ويلمح إلى أنه عند البدء بالقفز، فإنّ الحبل ملتف بجانب القافز على الجسر. وتحليل مجلة معلم الفيزياء، بالعكس من ذلك ذكر تحديدا أنّ الحبل كبير جدا، وأنه في بداية القفز يتدلى بالتفاف ممتدا لمنتصف ما بين القافز على الجسر وبعدها عودة إلى الجسر. وكلا التحليلين صحيح ولكن لحالتين فيزيائيتين مختلفتين.[11]

حتى مع "الفيزياء البسيطة،" يمكن لعلماء الفيزياء المتمرسين إيجاد أسباب للاختلاف. وهذه أحد ميزات الفيزياء التي تجعلها مثيرة للاهتمام.

ملاحظات

1. التحليل هنا هو نسخة معدلة قليلا فقط من التحليل الذي عمل به كريزيستوف ريبيلس Krzysztof Rebilus، "قفز التزلج الأمثل: Krzysztof Rebilus, "Optimal Ski Jump," *The Physics Teacher*, February 2013, pp. 108–109.
2. استُلهمت بعد قراءة ورقة أنيقة بقلم ديفيد بيتيل David Bittel (معلم فيزياء للمرحلة الثانوية في كونيتكت Connecticut): "Maximizing the Range of a Projectile Launched by a Simple Pendulum," *The Physics Teacher*, February 2005, pp. 98–100.
3. هذه الزاوية تُطلق طرزاناً في خط مستقيم إلى الأعلى، وبذلك، سيسقط في نهاية المطاف في خط مستقيم إلى الأسفل. لذلك، هذه الزاوية، بينما هي مثيرة للاهتمام، هي ربما ليست مفيدة جدا للتأرجح لعبور مستنقع (الزوايا الأكبر من 900 تقذف طرزاناً).
4. Carl E. Mungan, "Analytically Solving Tarzan's Dilemma," *The Physics Teacher*, January 2014, p. 6. ويوضح منغان كيفية إيجاد زاوية الانطلاق المثلى بحل معادلة تكعيبية محددة، وهي ملاحظة عمل بها بيتيل Bittel سابقا (ملاحظة 2).
5. سميت على اسم روبرت هوك Robert Hooke العالم الذي عاصر نيوتن - 1703) (1635، الذي كان على قائمة نيوتن بما نسميه اليوم قائمة "غير الأصدقاء". يمكنك القراءة عن هوك ونيوتن وخلافهما ، في كتابي لحاف السيدة بيركنس الكهربائي *Mrs. Perkins's Electric Quilt*, Princeton University Press, 2009, pp. 167–168, 170–172, 184, 188, 190–19.
6. بشكل عام أكثر، الدالة الأسية e^{st} و s مقدار ثابت (كل مشتق من e^{st} هو نسخة تدريجية من e^{st})، ولكن المضي هذا الطريق سيؤدي بنا سريعا إلى دوال أسية ذات أسس خيالية. أي أنّه، في الحقيقة، الطريقة الأفضل رياضياتيا والأكثر عمومية لحل المعادلات التفاضلية مثل التي لدينا، ولكن للحالة البسيطة جدا التي لدينا هنا هي أكثر قوة مما نحتاج. وأنّ استخدام الجيب sines وجيب التمام cosines سيؤدي المهمة.

7. بفرض أنّ القافز يبدأ سقوطه بسرعة تساوي صفرا. أي أنّ، يهوي من على الجسر ببساطة.

8. لبيان أنّ أقصى ناتج من $f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ هو $\sqrt{a^2+b^2}$، إبدأ بتعيين $\frac{df}{dt} = 0$ وبيّن أنّ ذلك يظهر عندما تكون $t = \frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. بعدها أدخل هذه t في $f(t)$ لإظهار أنّ $f\left\{\frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\} = a\cos\left\{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\} + b\sin\left\{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\} = \sqrt{a^2+b^2}$. ورسم المثلث القائم الواضح قد يساعد في الخطوة الأخيرة هذه.

9. Peter Palffy-Muhoray, "Acceleration during Bungee-Cord Jumping," *American Journal of Physics*, April 1993, pp. 379, 381. فقد صححت خطأ مطبعياً في الرياضيات في طبعة *AJP*، وقد وضحت بشكل كبير كيفية حل المعادلة التفاضلية لحركة القافز، ولكن تقديمي هنا هو أساسا لبلافي مهوراي.

10. David Kagan and Alan Kott, "The Greater-Than-g Acceleration of a Bungee Jumper," The *Physics Teacher*, September 1996, pp. 368–37.

11. يمكنك العثور على العديد من المناقشات على الفيزياء الرياضياتية لموقف *PT* (في مستوى رياضياتي أعلى من هذا الكتاب) في كتابي *Inside Interesting Integrals*, Springer, 2015, pp. 212–219.

21 مسار ركل الكرة

"العلامة التي تدل على لاعب عظيم هي الوقت المستغرق لبقاء الكرة معلقة في الهواء قبل إحراز الهدف".

- مشجع كرة مجهول، متحدثا عن دقيقة عميقة.

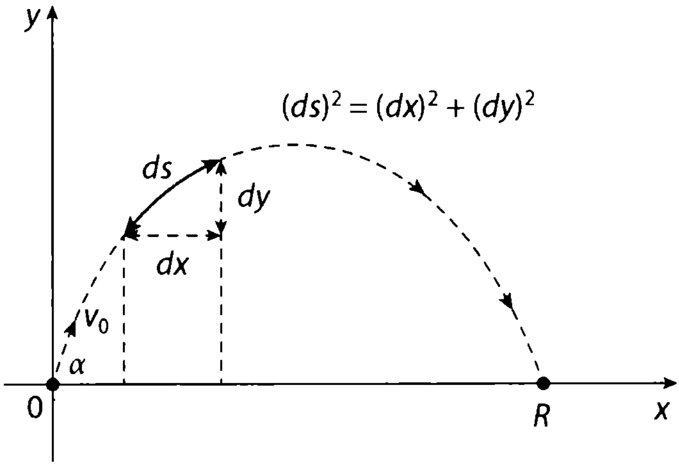
"وقت التعلّق" Hang Time ليست إشارة إلى موضوع أحد أفلام كلينت إيستوود 1968 الكاوبوي Westren لعام 1968 هانغ إم هايٍ (اشنقهُ عاليا) Hang 'Em High ولكن، هي الفترة التي تستغرقها كرة القدم لقطع مسار قطع مكافئ[1] من قدم راكل الكرة إلى ممسك الكرة من الفريق المتلقي. ويمنح وقت التعلق الطويل وقتا كافيا لفريق راكل الكرة للوصول إلى آخر الملعب قبل أن تكون الفرصة سانحة للفريق المتلقي بتمرير الكرة. وقد يكون لوقت التعليق أيضا دور مهم في لعبة البيسبول Baseball، فعندما تطير الكرة مرتفعة بعيدا إلى خارج الملعب ستعطي أي راكض، موجود عند القاعدة، وقتاً أطول للوصول إلى القاعدة التالية – ولكن ذلك لا يحصل. وذلك بسبب قاعدة "اللمس" Tag Up التي تتطلب من راكضي القاعدة بأن يلمسوا القاعدة أو يبقوا عند قاعدة البداية الخاصة بهم حتى بعد أن تسقط الكرة في منطقة عادلة Fair territory أو أن يلمسها أولا لاعب داخل الملعب Fielder.

ومن السهل حساب وقت التعليق لكرة قدم على مسار قطع مكافئ. كما وجدنا في الفصل 18، معادلة ارتفاع كرة القدم عند مغدرة قدم الراكل بسرعة v_0 بزاوية α،عند الزمن t، هي:

$$y(t) = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2.$$

وتُخبرنا هذه العلاقة بأنّ $y(t) = 0$ عندما $t = 0$ (عندما تغادر الكرة قدم الراكل) وعند

$$t = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g} = T$$



رسم توضيحي 21.1 جزء تفاضلي لمسار القطع المكافئ

(عند التقاط الكرة). و T هي وقت التعليق، ونرى أنها تزيد باستمرار مع زيادة α من 0 إلى 90°. والزاوية α هي المعامل الوحيد الذي يتحكم فيه الراكل بينما نفترض السرعة v_0 هي دالة لقوة الرجل[2] (وg هي، بالطبع، عجلة الجاذبية). وأطول وقت تعليق هو (مثير للسخرية بعض الشيء) للزاوية $\alpha = 90°$، ركلة مستقيمة إلى الأعلى، وهي بالطبع آخر شيء يريده الراكل! وهي ركلة لاتذهب إلى أي مكان (مداها يساوي صفر)، بينما يريد الراكل مدى طويلا لركلته. لذلك، في الحقيقة، وهذا هو المأزق. كيف يركل الكرة (ماذا يجب أن تكون α؟) للحصول على وقت تعليق طويل ومدى طويل؟

وهناك إجابة واحدة ألا وهي انتقاء α تمكن الكرة من الانتقال إلى مسافة طويلة في رحلتها عبر الهواء. وهذا الخيار، في الحقيقة يعطي وقت تعليق طويلاً ومدى طويلا، وهما على حد سواء أجزاء كبيرة من الحد الأقصى الممكن لكل على حدة. (سترى ذلك عندما ننتهي من تحليلنا). إذاً، ماهي زاوية القذف α التي تُعطي أطول مسار؟

وكما هو موضح في الشكل 21-1، إذا نظرنا إلى قسم صغير عشوائي من مسار القطع المكافئ، يمكن إيجاد طوله (التفاضل ds، لأنة صغير جدا) من نظرية فيثاغورس كالتالي

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

وبذلك الطول الكلي للمسار، من البداية إلى النهاية، هو:

$$L = \int_{\text{start}}^{\text{finish}} ds = \int_{\text{start}}^{\text{finish}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{\text{start}}^{\text{finish}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

ولأنّ التكامل الذي في أقصى اليمين هو للحد x، فإنّ النهايات الأعلى والأسفل بداية

Start و"نهاية" Finish معطيان كالحدين $x = 0$ و $x = R$، على الترتيب. كما بينا في الفصل 17، إذا كانت زاوية القذف والسرعة هما α و v_0 (في الفصل 17 استخدمنا θ و V، ولكنه تغيير بسيط في العلامات)، بعدها

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

إذن، مسألتنا هي إيجاد قيمة α التي تعطي أكبر قيمة للطول L، حيث

$$L = \int_0^R \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

والآن عندما وجدنا في الفصل 18، معادلة مسار القطع المكافئ لركلة كرة قدم

$$y = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2.$$

إذن،

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x.$$

سأدعك تملأ التفاصيل، ولكن إذا أدخلت هذا المُتغيرات في تكامل L وكنت حذرا في الجبر، ستجد أنّ

$$L = \frac{g}{v_0^2\cos^2(\alpha)}\int_0^R \sqrt{\frac{v_0^4\cos^4(\alpha)}{g^2}+\left\{x-\frac{v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}\right\}^2}\,dx.$$

وهو واضح في الحال أنّ

$$\frac{v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = \frac{1}{2}R,$$

ومع فقط القليل من الجبر السهل يجب أن يكون بمقدورك إظهار أنّ

$$\frac{v_0^4 \cos^4(\alpha)}{g^2} = \left\{ \frac{R}{2\tan(\alpha)} \right\}^2 .$$

وبذلك

$$L = \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \int_0^R \sqrt{\left\{ \frac{R}{2\tan(\alpha)} \right\}^2 + \left\{ x - \frac{1}{2}R \right\}^2}\, dx.$$

إذا قمنا بعدها بتغيير المتغير

$$u = x - \frac{1}{2}R,$$

وبذلك، $du = dx$، إذن

$$L = \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \int_{-R/2}^{R/2} \sqrt{u^2 + \left\{ \frac{R}{2\tan(\alpha)} \right\}^2}\, du.$$

هذا التكامل من الصيغة العامة[3]

$$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}).$$

حيث

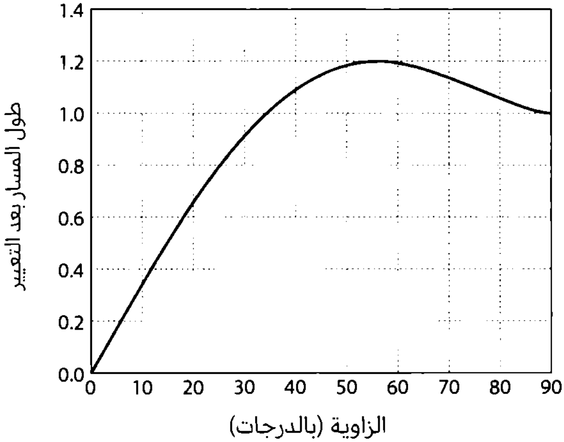
$$a = \frac{R}{2\tan(\alpha)}.$$

وبتطبيق هذا التعبير في التكامل L، وبتخطي بعض الخطوات الجبرية التي سأتركك تقوم بها، نصل إلى

$$L = \frac{v_0^2}{g} \left[\sin(\alpha) + \cos^2(\alpha) \ln \left\{ \sqrt{\frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}} \right\} \right].$$

وبعدها "ملاحظة" الهوية Identity[4]

$$\sqrt{\frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}} = \frac{1 + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$



الرسم التوضيحي 21.2 طول المسار القطع المكافئ للركلة بعد التعيير كدالة من α

ونصل في النهاية عند

$$\boxed{L = \frac{v_0^2}{g}\left[\sin(\alpha) + \cos^2(\alpha)\ln\left\{\frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right\}\right].}$$

ويظهر الشكل 21.2 رسماً بيانياً للقيمة $L/\frac{v_0^2}{g}$ في مقابل α (أي، L بعد التعيير مقابل α). وكما ترى، يوجد، حقا، قيمة قصوى عند تقريبا $\alpha = 55^\circ$ (وتُظهر دراسة رقمية مفصلة أنّ $\alpha=56.46^\circ$ هي نتيجة أكثر دقة[5]). والقيمة القصوى كبيرة، مع ذلك، فالقيمة الدقيقة للزاوية α ليست حرجة.

ومن المثير للاهتمام مقارنة (للسرعة نفسها v_0) وقت التعليق ومدى ركلة بزاوية $\alpha=45^\circ$ (أقصى مدى للركلة) لنفس قيم ركلة $\alpha=56.46^\circ$ (أقصى طول لمسار الركلة). ووقت التعليق بعد التعيير لكل الركلات هو:

$$\frac{T}{v_{0/g}} = 2\ \sin(\alpha),$$

والمدى بعد التعيير لكل الركلات هو:

$$\frac{R}{v_0^2/g} = 2\ \sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

مما يعطينا جدول المقارنة التالي.

جدول 21.1
وقت التعليق والمدى لقيمتين من α

α	وقت التعليق بعد التعيير	المدى بعد التعيير
45.00°	1.414	1.000
56.46°	1.667	0.921

وبذلك، القيمة المدفوعة بالمدى عند التبديل بزاوية $\alpha = 56.46^\circ$ بدلا من $\alpha = 45^\circ$ هو نقص بنسبة 7.9%، ولكن المكافأة في زيادة تقريبا 18% في وقت التعليق. وأقصى وقت تعليق ممكن بعد التعيير (للركلة عديمة الفائدة $\alpha = 90^\circ$) هو 2، وبذلك تحقق الركلة بزاوية $\alpha = 56.46^\circ$ أكثر من 83% من أقصى وقت تعليق ممكن مع الاحتفاظ بنسبة 92% من أقصى مدى ممكن.

من قال إنه لا يمكنك أن تحصل على كعكتك وتأكلها في الوقت نفسه؟

ملاحظات

1. كما فعلت على مدار تحليلاتنا السابقة لمسارات المقذوفات، أنا لا أضع تأثير مقاومة الهواء في الاعتبار. إذا تعبت من قراءة تنبيهاتي بخصوص مقاومة الهواء، إذن يمكنك قراءة جميع ما يخصها (مع بعض التعقيدات الرياضياتية الصعبة، بسبب، بخلاف هذا الكتاب، الفيزياء ليست سهلة) وفي كتابي لحاف السيدة بيركنز الكهربائي: *Mrs. Perkins's Electric Quilt*, Princeton 2009, pp. 120–135.
2. عموما، أنا أعتقد أنّ اللاعبين يكادون دائما يركلون الكرة بأقصى قوة، مع استثناء الركلات الجانبية، فتكون الأسباب الاستراتيجية هي المطلوبة من الركلة القصيرة. ونحن لاندرس هذه الحالة هنا.
3. تأتي هذه الصيغة للتكامل غير المحدد من البحث عنها ببساطة في جدول للتكاملات (انظر: ملاحظة 4 في الفصل 19). ويمكنك، بالطبع، التأكد من الصيغة عند اشتقاقها.
4. ولاظهار أنّ هذا تمرين جيد في الجبر، أشجعك على التأكد من صحة الهوية Identity.
5. وظهرت هذه النتيجة الرقمية أول مرة في مقالة: Haiduke Sarafian, "On Projectile Motion," *The Physics Teacher*, February 1999, pp. 86–88.

22 طرق سهلة لقياس الجاذبية من مرآبك

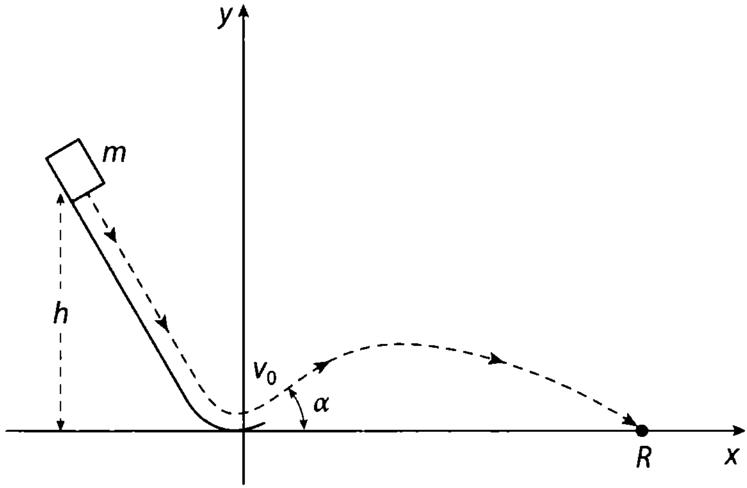
"ليس من الصعب فهم المدارات. إنها الجاذبية التي تحرك أعماق الأرق".
- نورمان مايلر، من كتاب حريق على القمر Fire on the Moon (1970)

في الوقت الذي وصلت فيه إلى هذا الفصل بالتأكيد أصبحت تتوقع رؤية عجلة الجاذبية g في نصف المعادلات.و g، بالطبع، هي عجلة الجاذبية على سطح الأرض، وتساوي تقريبا 9.8 متر/ثانية تربيع ≈ 32.2 قدم/ثانية تربيع. عندما أجرينا حساباتنا التي تضمنت حركة المقذوفات، وأنبوب النقل، وقفزة البنجي، الأسطوانات المتدحرجة إلى الأسفل على السطح المائل، على سبيل المثال، كانت تظهر g بشكل متكرر في مكان ما في الحسابات. وقد حدث ذلك بانتظام لدرجة أنه صار من السهل الاعتقاد أنه من الضروري أن تظهر g عند دراسة فيزياء "الأشياء التي تتحرك في الفضاء".

ولكن الأمر ليس كذلك، إليك مثالاً معاكساً ومثيراً للدهشة، نوقش لأول مرة (على حد علمي) في ورقة أنيقة نُشرت في عام 1960.[1] تخيل (كما هو مبين في الشكل 22.1) كتلة m، ساكنة في البداية، وتنزلق من المستوى المائل إلى أسفل من الجهة الرأسية عديمة الاحتكاك ذات الارتفاع h. وفي نهاية السطح تُقلع الكتلة من المستوى الأرضي إلى الهواء بسرعة v_0 بزاوية α. ماهي R، المسافة الأفقية من نقطة الاقلاع إلى نقطة ارتطام الكتلة بالأرض؟

كما وجدنا في الفصل 18، المدى لمقذوف ينطلق من نقطة المركز بسرعة v_0 وبزاوية α، مُعطى كالتالي (انظر: المعادلة B في الإطار هناك)

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\cos(\alpha)\sin(\alpha).$$



الرسم التوضيحي 22.1 المدى R مستقل عن g!

ومن قانون حفظ الطاقة، يمكننا كتابة

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh ,$$

التي تدل على أنّ الطاقة الحركية للكتلة المقذوفة تساوي النقصان في طاقة الوضع للكتلة. أي أنّ،

$$v_0^2 = 2gh .$$

وبذلك،

$$R = 4h \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

وهو تعبير ستلاحظ أنه لا يحتوي على g. وكما كتب المؤلف في الملاحظة [1]، "إذا أجريت هذه التجربة على القمر، أو المريخ، مع [انزلاق الكتلة] إلى أسفل المنحدر نفسه... سيكون لها [المدى نفسه لو كانت على الأرض]".[2]

والاختلاف على الأرض أو القمر أو المريخ هو سرعة القذف v_0. فإذا كانت g أكبر، تصبح سرعة القذف أكبر، التي تعوض بالضبط عن زيادة الجاذبية، لتُعطي المدى R نفسه. والرياضيات تجعل ذلك واضحا، ولكن لا أعتقد أنه كان كذلك في السابق. ومازال، على الرغم من هذا الحساب الجميل، فإنّ للثابت g عادة للظهور في معادلاتنا. لذلك، من المهم معرفة قيمته. وهذا هو سؤالنا هنا، آخر سؤال للكتاب – كيف تقيس g؟

لقد كتبت عن هذا السؤال قبل بضع سنوات،[3] مع مناقشة تبدأ كالتالي:

تحديد قيمة g من التجربة، في الحقيقة، تجربة كلاسيكية تُجرى كل سنة في الآلاف من مختبرات الفيزياء لمستجدي الجامعة حول العالم. وأتذكر جيدا عندما أجريتها كطالب مستجد

في مقرر فيزياء 51 في جامعة ستانفورد (1958) Stanford University. أتذكرها كتجربة بالية وغير ملهمة تطلبت مشاهدة مولد شرارات نابضة عالية السرعة يثقب حُفراً عبر شريط نازل مصنوع من الشمع (وأتذكر حتى مساعدة المدرس من طلبة الدراسات العليا وهي تبدو كأنها تفضل أن تكون في مكان غير هذا)، وتبع ذلك قياس المسافات بين الثقوب المحروقة المجاورة للتوصل في نهاية المطاف إلى، مع بعض الحسابات المتوسطة السحرية، قيمة g. إليك طريقة أفضل- سريعة وذات مستوى تعليمي أفضل – لقياس g.... كل ما ستحتاج إليه من أدوات هو عصا قياس، كرة مطاطية نطاطة، وساعة توقيت. ولن تحتاج إلى مولد شرارة غامضة وباهضة الثمن (بالنسبة إلى أغلب مستجدي الجامعة على أي حال). والمطلوب منك أنّ تكون قادرا على اتباع الفيزياء الابتدائية وبعض الجبر البسيط من المرحلة الثانوية. بعدها سيكون باستطاعتك قياس العجلة g في مكان سكنك في أقل من 60 ثانية.

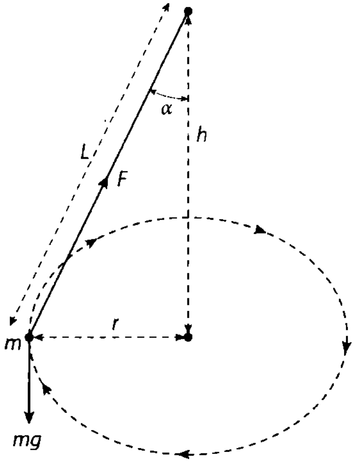
وهناك بعدها تبعها تحليل من ثلاث صفحات يشمل بعض الفيزياء البسيطة، مما نتج منها هذه الصيغة للعجلة g:

$$g = \frac{8h_0c^2}{T_n^2}\left(\frac{1-c^n}{1-c}\right)^2 ,$$

حيث، إذا وقعت كرة من ارتفاع h_0 و h_1 هو ارتفاع أول قفزة للكرة، إذا

$$c = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}},$$

و T_n هو الوقت لعدد n من القفزات (اختر أي عدد مناسب من n). وسهولة أداء هذه العملية واضحة (لكتاب السيدة بيركنسر، قد ذهبت بالفعل إلى مرآبي في المساء وقمت بالتجربة – كانت سهلة وأكثر متعة مما كان في مختبر ستانفورد)، وهناك العديد من الطرق الأخرى لتحديد قيمة g المشابهة في السهولة لدرجة قد تثير الدهشة.



رسم توضيحي 22.2 الأبعاد الهندسية للأرجحة المخروطية Conical Swing

وسيريك بقية الفصل بعضاً منها. ومع ذلك، تأكد من أنّ الفيزيائيين المكرسين للحصول على قيم دقيقة جدا من g لا يستخدمون الكرة المرتدة أو أياً من الطرق الأخرى في هذا الفصل، التي تكون دقيقة (في أحسن الأحوال) إلى نسبة صغيرة فقط. ومع ذلك، فإنّ هؤلاء الفيزيائيين يبذلون قدرا معقولا من المال على معدات متطورة،[4] في حين أنّ كل من النّهج التي سأقول لكم عنها هنا سهلة على حد سواء وغير مكلفة (أقل من 20 دولارا).

الدوران المخروطي

تخيل أنك تمسك طرف خيط قوي وعديم الكتلة تقريبا (خيط صيد السمك المصنوع من النايلون كتقريب جيد) في يدك مع الطرف الآخر مربوط بكتلة كبيرة إلى حد ما (عدة فلكات حديدية مربوطة ببعضها تؤدي المهمة). وبعدها، كما هو مبين في الشكل 22.2 حرك يدك لتجعل الوزن يتأرجح بسرعة ثابتة بمسار دائري أفقي بنصف قطر r. كما هو موضح في الشكل، المسافة من يدك إلى مركز المستوى المداري الدائري هي h، وطول الخيط هو L. وقوة الشد في الخيط هي F.

نحن نعلم أنّ عجلة التسارع المركزية التي تمر فيها كتلة دوارة هي $\frac{v^2}{r}$، فـv هي سرعة الكتلة. وإذا كتبنا T كالزمن المستغرق لإتمام دورة واحدة، إذا

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

وبذلك العجلة المركزية هي:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

مما يعني أنّ القوة المتجه إلى الداخل (القطرية) المطلوبة من هذه العجلة هي:

$$m\frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

وهذه القوة مزودة من المركب الأفقي لقوة شد الخيط (القطري) المتجه إلى الداخل وهي $F\sin(\alpha)$ وهي:

$$F\sin(\alpha) = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

والآن بما أنه ليست للكتلة الدوارة حركة رأسية، نحن نعلم أن محصلة القوة الرأسية هي صفر. وهذه يعني أنّ المركب الرأسي للأعلى لقوة شد الخيط يجب أن يوازن بالضبط قوة الجاذبية للأسفل، وبذلك

$$F\cos(\alpha) = mg.$$

أي أنّ،

$$m = \frac{F}{g}\cos(\alpha),$$

وبذلك (مع عدم الحاجة إلى إلغاء F من الجهتين)، نحصل على

$$\boxed{F\sin(\alpha) = \frac{F}{g}\cos(\alpha)\frac{4\pi^2 r}{T^2}.}$$

(وقد وضعت هذين المتغيرين في إطار لأنني سأشير إليهما بعد قليل). وأخيرا، من الهندسة، لدينا

$$\frac{r}{L} = \sin(\alpha), \qquad \frac{h}{L} = \cos(\alpha),$$

وإذا، باستبدال هذين المتغيرين الأخيرين بالمتغيرات في المعادلة الموجودة داخل الإطار (وأخيرا نلغي F)، نحصل على نتيجتنا:

$$g = \frac{4\pi^2 h}{T^2}.$$

لاحظ أنه لا حاجة لنا بمعرفة m، r أو L فقط h و T.

ولاستكمال هذه العملية باليد، مع ذلك، فمن الواضح أنه يحتاج إلى يد ثابتة تماما. وإذا ميكنتها قليلا باستبدال يدك بمحور محرك كهربائي عمودي متزامن، ستصبح العملية أسهل.[5] وباستخدام محرك ذو 60 دورة/الدقيقة، على سبيل المثال، سيعطي أتوماتيكيا T=1 ثانية لفترة الدورة الواحدة، إذا الآن، لن تحتاج إلى ساعة توقيت. والقياس الوحيد المتبقي الذي علينا إيجاده هو h. وهذه الطريقة في إجراء التجربة تقدم تطوراً غريباً قليلا: لن تعمل إلا إذا كان طول الخيط L أطول من طول معين حرج، مع ذلك، بمجرد أن يتعدى الطول الحرج، لن يكون من المهم ما هو L فعلا! إليك السبب.

نعود إلى المعادلة التي في الإطار، نلغي F، ونحصل على

$$\frac{g}{\cos(\alpha)} = \frac{4\pi^2 r}{T^2 \sin(\alpha)} = \frac{4\pi^2 r}{T^2\left(\frac{r}{L}\right)} = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L.$$

وبكتابة الثابت $\frac{2\pi}{T}$ تذكر، T الآن ثابتة لأنّنا نستعمل محركاً متزامناً - كما ω (هذه هي السرعة الزاوية الثابتة *Fixed angular speed* لدوران كتلة m)، يصبح لدينا

$$\frac{g}{\cos(\alpha)} = \omega^2 L,$$

أو

$$\cos(\alpha) = \frac{g}{\omega^2 L}.$$

ولكي يكون لهذا منطق فيزيائي (لتكون α حقيقية) يجب أن تكون $\cos(\alpha) < 1$؛ مما يعني أنّ

$$L > \frac{g}{\omega^2}.$$

ولمحرك ذي 60 دورة لكل دقيقة (T = 1 ثانية) يصبح لدينا

$$L > \frac{32.2 \text{ feet/seconds-squared}}{\left(\frac{2\pi}{1 \text{ second}}\right)^2} = \frac{32.2}{4\pi^2} \text{ feet} = 0.816 \text{ feet}.$$

وبهذا يجب على L أن تكون أطول قليلا من 10 بوصات.[6]

الدوران الأفقي

تتضمن الطريقة الثانية أيضا تدوير كتلة في مدار أفقي دائري، باستعمال أنبوب بسيط ليس أكثر غرابة (أنبوب الورق المقوى في منصف لفة المناشف الورقية يكفي). والتركيب موضح في

الشكل 22.3، فتُدخل خيط الصيد خلال الأنبوب وتربط كتلتين متساويتين (استعمل الفلكات مرة أخرى) لكلا الطرفين. بعدها، أمسك بالأنبوب قائما في يدك، واجعل الكتلة العلوية تدور في مدار ذي نصف قطر r وفترة T.

والسرعة المدارية هي (كما في التدوير المخروطي)

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

وإذًا العجلة المركزية هي:

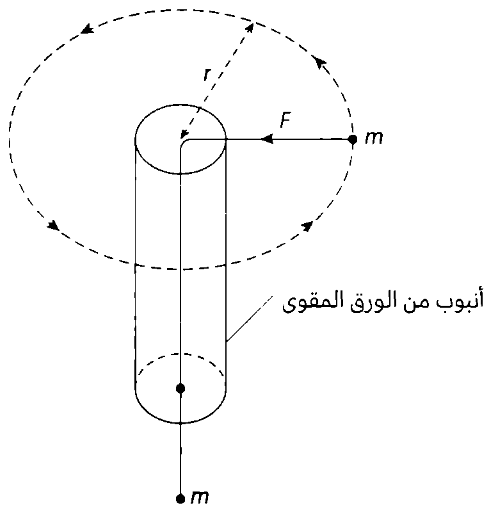
$$\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

وإذًا قوة الشدّ في خيط الصيد هي:

$$F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

وينتج هذا الشد من جذب الجاذبية على الكتلة المعلقة، وبذلك

$$F = mg = m\frac{4\pi^2 r}{T^2},$$



الرسم التوضيحي 22.3 الأبعاد الهندسية للتدوير الأفقي

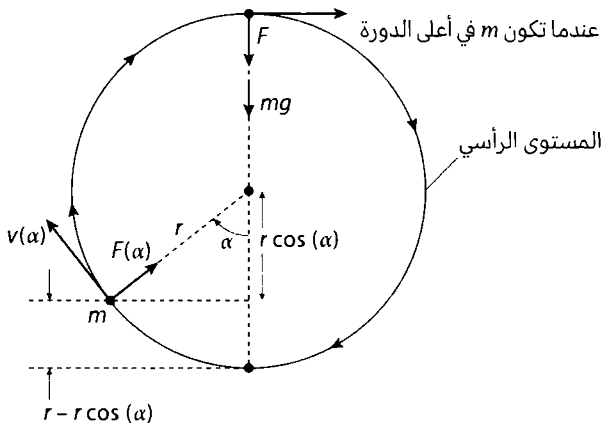
أو

$$g = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

وقد اقترح مُنشئ [7] هذه الطريقة الذكية طريقة متساوية في الذكاء لقياس r: "يجب ربط عدة عقد في [خيط صيد السمك] بمسافات معلومة من [الكتلة الدوارة] ليكون من السهل قياس نصف القطر r". أي قمْ ببساطة بتدوير الكتلة الدوارة للأعلى حتى تظهر عقدة (أو اثنتان أو ثلاث) مُقاسة من قبل خارج الأنبوب، وعندها اطلب إلى صديق أن يقيس زمن استكمال رقم صحيح من عدد الدورات باستعمال ساعة للتوقيت للحصول على معدل قيمة T. هذا فقط!

التدوير الرأسي

للطريقة الثانية لتحديد g باستعمال فعليا لا شيء، ستربط كتلة m مرة أخرى (مرة أخرى كمية من الفلكات) في نهاية خيط وحركها في مسار دائرة بنصف قطر r، ولكن الآن يقع المدار على مستوى رأسي، كما هو موضح في الشكل 22.4. ستقوم بتدوير الكتلة بطريقة مميزة جدا – بعد أن تجعلها تدور بخطوة جيدة، قلل معدل التدوير حتى تشعر بأن الخيط قد بدأ بالتراخي عندما تكون الكتلة في أعلى المدار. (قد يأخذ ذلك بعضاً من التجريب والخطأ حتى تتمكن منه، ولكن مُنشئ [8] هذه الطريقة ادّعى أنّ تلاميذه سرعان ما أتقنوا الطريقة). قد يفاجئك ذلك بأنه شيء غريب يمكن فعله، ولكن إليك سبب أنه مفتاح الطريقة.



رسم توضيحي 22.4 الأبعاد الهندسية للتدوير الرأسي

بخلاف كل من التدوير المخروطي أو الأفقي، في التدوير الرأسي تكون قيمة السرعة المدارية للكتلة وقوة الشد في الخيط غير ثابتة. وبدلاً من ذلك، إذا كانت α هي الزاوية في الشكل 22.4 التي تحدد مكان الكتلة بينما تدور، إذا كانت السرعة وقوة الشد كلاهما دوال للزاوية α. أي أنّ، $v = v(\alpha)$، و $F = F(\alpha)$. وتحديدا، $v(0)$ هي السرعة في قاع المدار، في حين $v(\pi)$ هي السرعة في أعلى المدار ($\alpha = \pi = 180°$). والتحليل التالي مبني على قانون حفظ الطاقة Conservation of energy، أي أنّ، مجموع الطاقة الكامنة Potential energy للكتلة (اختصارا: الطاقة P.E). والطاقة الحركية Kinetic energy (اختصارا: الطاقة K.E). هو، لكل α، ثابت. وسنتخذ النقطة المرجعية صفر للطاقة الكامنة كقاع المدار.

الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للكتلة في أعلى المدار هما:

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}mv^2(\pi), \quad \text{P.E.} = 2rmg.$$

في حين الزاوية α عشوائية،

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}mv^2(\alpha), \quad \text{P.E.} = [r - r\cos(\alpha)]\,mg = rmg\,[1 - \cos(\alpha)].$$

ومن ثم، من قانون حفظ الطاقة، يمكننا كتابة

$$\frac{1}{2}mv^2(\pi) + 2rmg = \frac{1}{2}mv^2(\alpha) + rmg\,[1 - \cos(\alpha)].$$

أو

$$\frac{1}{2}v^2(\pi) + 2rg = \frac{1}{2}v^2(\alpha) + rg\,[1 - \cos(\alpha)].$$

ويمكننا تحديد $v(\pi)$ كما يلي. العجلة المركزية لكتلة في أعلى المدار مُعطى كالتالي

$$\frac{v^2(\pi)}{r}.$$

التي تتطلب القوة

$$m\frac{v^2(\pi)}{r}.$$

وهذه القوة يمنحها مجموع قوة شد الخيط F وقوة الجذب على الكتلة، اللتين على خط واحد (وبالطبع، كلتاهما متجهتان إلى الأسفل). لذا،

$$m\frac{v^2(\pi)}{r} = F + mg.$$

من ثم، بما أنّ $F=0$ عند أعلى المدار (تذكر أنك تأرجح الكتلة حتى يكاد الخيط يتراخى عندما يكون في أعلى المدار)، نحصل على

$$\frac{v^2(\pi)}{r} = g,$$

أو

$$v^2(\pi) = rg.$$

وبذلك، تصبح معادلة حفظ الطاقة

$$\frac{1}{2}rg + 2rg = \frac{1}{2}v^2(\alpha) + rg\,[1 - \cos(\alpha)]\,.$$

سأدعك تقوم بالجبر السهل لبيان أنّ

$$v(\alpha) = \sqrt{3rg\left\{1 + \frac{2}{3}\cos(\alpha)\right\}}.$$

والآن، هنا تأتي الملاحظة الحاسمة التي تدفع التحليل إلى المضي قدما. إذا $ds=r\,d\alpha$ جزء التفاضل من المسار المداري الكلي، إذاً التفاضل الزمني dt الذي تستغرقه الكتلة للانتقال هذه المسافة هي

$$dt = \frac{ds}{v(\alpha)} = \frac{r\,d\alpha}{v(\alpha)}.$$

إذاً، الزمن الكلي T لمدار واحد كامل (الزمن الدوري) هو:

$$T = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{r\,d\alpha}{v(\alpha)}.$$

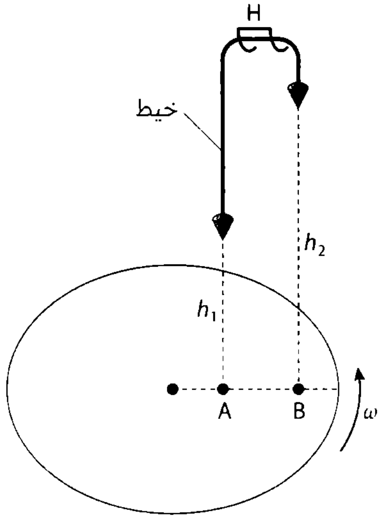
فيُجرى التفاضل على مدار واحد. وهو،

$$T=\int_0^{2\pi}\frac{r\,d\alpha}{\sqrt{3rg\left\{1+\frac{2}{3}\cos(\alpha)\right\}}}=\sqrt{\frac{r}{3g}}\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\cos(\alpha)}}\quad,$$

أو الحل لإيجاد g، نحصل على

$$g=\frac{r}{3T^2}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\cos(\alpha)}}\right\}^2.$$

والتكامل المحدد، بالطبع، هو رقم خالص. ويقترح مُنشئ الطريقة (ملاحظة 8) أن يُقيّم التكامل بالرسم البياني (باستخدام تعبير مساحة التكامل) وذكر النتيجة "تقريبا 7". ففي الحقيقة، من السهل بيان أنّ التكامل القطع الناقص من النوع الأول [9]*Elliptic integral of the first kind*, مع قيمة يمكن البحث عنها وإيجادها في الجداول (التي تعطي 6.993، وهي قريبة جدا من 7).



الشكل 22.5 الأبعاد الهندسية للسقوط المزدوج

السقوط المزدوج

جميع طرق تحديد g التي أريتك إياها إلى الآن تتضمن تدوير كتلة من طرف خيط. والطريقة التالية، آخر طريقة في الفصل، تعود مباشرة إلى ما هو أكثر شيوعا بما نربطه مع الجاذبية: سقوط الأشياء. وقد لاحظت أيضا، أنه مع كل تحليل سابق، أننا قد عدنا

أكثر بالزمن إلى الوراء. مع هذه الطريقة الأخيرة سنعود إلى أواخر القرن التاسع عشر، إلى كتاب مدرسي لعام 1884 بعنوان الفيزياء الجديدة *The New Physics*. كتبه جون تروبريدج John Trowbridge (1843 -1923)، الذي كان أستاذاً للفيزياء في هارفارد Harvard من 1870 حتى تقاعده في 1914، ويشرح طريقة جميلة بشكل أنيق في نظريتها لقياس g. ويبين الشكل 22.5 تركيب التجربة.

معلقة فوق قرص ثابت (في الوقت الحالي)، الذي عند تشغيله، سيحرك ثقلين متطابقين مدببين عموديا بسرعة زاوية Angular speed ثابتة، موضوعين بحيث إذا سقطا، سيقعان على القرص عند نقطتين A وB، وهما على الخط القطري المشترك. تخيل في الحقيقة، أن هناك قطعة من الورق القاسي ملصقة على القرص، فكل ثقل يثقب الورق عند سقوطه. وكما هو موضح في الشكل، الثقلان مربوطان معاً بواسطة خيط (سترى لماذا، قريبا) يعبر خلال خطاف، H، مع ثقل أقرب إلى مركز القرص عند الارتفاع h_1 والثقل الآخر على ارتفاع h_2، مع $h_1<h_2$.

والآن، اجعل القرص يدور بسرعة زاوية ثابته ω، وبعدها أسقط الثقلين في الوقت نفسه. والكلمة نفسه هي رئيسية هنا، والطريقة السهلة لإجراء ذلك هي بحرق الخيط بواسطة عود ثقاب. وهذا أفضل من قص الخيط باستعمال مقص، فإنك تتفادى أي حركة في الثقلين التي تنتج مؤكدا من حركة نصلي المقص. وبعد أن ينفصل الخيط، سيسقط الثقلان على القرص، وسيستغرقان t_1 و t_2، على الترتيب، حيث

$$\frac{1}{2}gt_1^2=h_1.$$

و

$$\frac{1}{2}gt_2^2=h_2.$$

ومن الواضح أنّ $t_1 > t_2$. أي أنّ،

$$t_1=\sqrt{\frac{2h_1}{g}}<t_2=\sqrt{\frac{2h_2}{g}}.$$

والفرق في وقتي السقوط معطى كالتالي

$$\Delta t=t_2-t_1=\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_2}-\sqrt{h_1}\right).$$

عندما يرتطم الثقل الأول بالورقة الدوارة، سيثقب حفرة فيها. وعندما يضرب الثقل الثاني الورقة الدوارة بعد Δt، سيثقب أيضا حفرة. وبما أنّ الورقة تدور، فإنّ الثقبين لن يكونا على خط قطري مشترك. في الواقع، سيكونان على خطين قطريين مختلفين ويشكلان زاوية θ، حيث

$$\theta = \omega\Delta t = \omega\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}).$$

التي يمكننا إيجاد g منها

$$g = \frac{2\omega^2\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right)^2}{\theta^2}.$$

إذا عرفنا h_1، h_2 و ω، وقسنا θ باستخدام منقلة، سيمكننا بعدها من حساب قيمة g.

لا أعلم ما الذي استعمله تروبردج كقرص الدوار، ولكن يقترح كاتب حديث استخدام طاولة مشغل أسطوانات التسجيل الدوارة.[10] وهذه الأجهزة غير شائعة هذه الأيام مثلما كانت في الخمسينات القرن الـ20 (عندما كنت في الثانوية، وكانت موجودة في غرفة نوم كل مراهق في المجتمع الغربي)، ولكنها مازالت موجودة.[11] وطاولة مشغل أسطوانات التسجيل الدوارة النموذجية لها ثلاث سرعات يمكن الاختيار بينها: $33\frac{1}{3}$ دورة في الدقيقة، 45 دورة في الدقيقة، و78 دورة في الدقيقة. ولأنّ الانحرافات القليلة من السرعات المختارة سيحول الأغنية الرومانسية إما إلى أغنية يغنيها سنجاب أو إلى "صوت من عمق برميل"، لكنها دقيقة بشكل مثير للإعجاب في الحفاظ على التزامن.

وحالما تختار h_1 و h_2، فالقياس الوحيد الذي يجب أخذه هو للزاوية θ. إذاً قل إننا استعملنا الطاولة الدوارة ذات 78 دورة في الدقيقة، مع $h_1 = \frac{1}{2}$ قدم و $h_2 = 2$ قدم، ما القيمة التي نتوقع أن نراها لتلك الزاوية؟ بما أنّ 78 دورة في الدقيقة هي:

$$\omega = \frac{78}{60} \times 2\pi\,\frac{\text{radians}}{\text{second}} = 2.6\pi\,\frac{\text{radians}}{\text{second}},$$

يصبح لدينا

$$\theta = \omega\Delta t = 2.6\pi\sqrt{\frac{2}{32.2}}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\text{radians} = 1.44\ \text{radians} \approx 82^\circ,$$

زاوية يسهل قياسها. وبسرعات طاولة تشغيل أقراص التسجيل $33\frac{1}{3}$ دورة في الدقيقة، 45 دورة في الدقيقة، θ ستكون $\approx 35°$ و $\approx 48°$ على الترتيب.

والآن، سأختم هذا الفصل مع ملاحظة تاريخية التي لا تُقدّر غالبا حق قدرها، حتى من العديد من الفيزيائيين. مع قيمة g في اليد، التي أظهر هذا الفصل أنه ليس من الصعب تحديدها، فمن الممكن الآن تقدير G، الثابت في قانون التربيع العكسي لنيوتن Newton's inverse-square law لقوة الجذب F بين كتلتي نقطة M و m، يبعدان مسافة r عن بعضهما:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

إنّ من المهم فهم أنّ نيوتن لم يكتب هذه المعادلة قطّ (وبالتأكيد لم يكتب قطّ عن g[12]!)، والثابت G و g قُدما إلى الفيزياء بعد وفاة نيوتن بوقت طويل. وبالتحديد لم يظهر G، "كثابت للجاذبية" حتى نهاية القرن التاسع عشر.

إذا أخذنا M لتكون كتلة الأرض وm لتكون كتلة أخرى (لنقل، على سبيل المثال، فنجان الشاي)، من ثم، قوة الجذب على فنجان الشاي (ما نطلق عليه وزن الفنجان) يُعطى بالمعادلة mg. أي أنّ بما أنّ $r = R$ (نصف قطر الأرض)، إذا

$$mg = G\frac{Mm}{R^2},$$

وبذلك

$$G = \frac{gR^2}{M}.$$

إذا كان معدل كثافة الأرض هي ρ، إذا

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho.$$

مما يعطي

$$G = \frac{3g}{4\pi R\rho}.$$

(ملاحظة: الكتلة m في المعادلة $F = mg$ تُدعى الكتلة القصورية *Inertial* Mass، بينما m التي في $F = G\frac{Mm}{R^2}$ تُسمى كتلة التجاذب Gravitational Mass. ومساواة هذين الكتلتين تسمى مبدأ التكافؤ *Principal of Equivalency* إحدى نقاط بداية النظرية النسبية العامة (General Theory of Relativity).

وكان من المعروف لدى الأشخاص المتعلمين لقرون قبل ولادة المسيح أنّ الأرض هي كرة بنصف قطر 4 آلاف ميل تقريبا.[13] وإضافة إلى ذلك، من مراقبة القشرة الأرضية التي تبلغ كثافتها ضعفي كثافة الماء، وإذا افترضنا افتراضا معقولا من أنّ باطن الأرض أكثر كثافة، اقترح نيوتن أنّ معدل الكثافة بين خمس إلى ست مرات من الماء.[14] ومعدل كثافة الأرض هي ما قاسته تجربة كافندش Cavendish Experiment (انظر: الملاحظة 3 في الفصل 5) في عام 1798، بالتوصل إلى قيمة 5,540 كغم/م^3، التي في منتصف "التخمين التقديري" لفترة لنيوتن. وباستبدال كل الأرقام ذات العلاقة في المعادلة السابقة للثابت G، من ثم، قد يكون نيوتن قاس G! باستخدام النقطة المنصّفة لتقديره للكثافة ρ، قد يكون قاس

$$G = \frac{3 \times 9.8 \frac{\text{meters}}{\text{seconds squared}}}{4\pi \times 4{,}000 \text{ miles} \times 1,609 \frac{\text{meters}}{\text{mile}} \times 5{,}500 \frac{\text{kilograms}}{\text{meters cubed}}}$$

$= 6.6 \times 10^{-11}$ (متر مكعب)/(كغم/ثانية تربيع)

وهذا مختلف بنسبة 1% فقط عن القيمة الحديثة.

ولكن انتظر! أنت تعترض، بما أني قلت في البداية إنّ نيوتن لم يكتب قط عن g، وبالتأكيد لم يذكر قيمة لها، كيف يمكنه معرفة "9.8 متر/ ثانية تربيع"؟ ووجهة نظري هنا هي أنه قد يمكنه معرفة تلك القيمة إذا أجرى إحدى التجارب المذكورة في هذا الفصل. بالطبع، سيكون بحاجة إلى جهاز جيد للتوقيت لعمل ذلك، أداة يصعب العثور عليه في زمنه. فقد تضمنت مذكرات أبحاثه المحفوظة، تعليقات على ساعات البندول التي استخدمها (انظر: هيريفيل Herivel في الملاحظة 12) في تجارب الجاذبية التي عملها.

وبعدم حساب G، أضاع نيوتن فرصة لوضع نجمة ذهبية أخرى بجانب اسمه (كما لو كان يحتاج إلى واحدة أخرى). ومع ذلك، بينما كان نيوتن عبقريا، كان بشرا أيضا وبذلك قد يرتكب أخطاء كما البقية. وكتوضيح دراماتيكي لهذا، انظر: الخاتمة " خطأ نيوتن في حساب الجاذبية ". واليوم لن يجد تلميذ ثانوية جيد في الفيزياء واختبار تحديد المستوى في الحسبان مشكلةً في حل المسألة التي تعثر فيها نيوتن. ولكن دفاعا عنه أشك في أنّ مصدر خطأه (مازال مجهولا) كان مجرد زلة حسابية.

والآن، أخيرا، إليك بعض الحسابات لتقوم بها بنفسك. للأرض كتلة وقطر أكبر من القمر بعوامل 81 و 4، على التوالي. بيّن أنّ ذلك يخبرنا بأنّ عجلة الجاذبية على سطح القمر هي $\approx \frac{1}{5}g$. (وقد وضح ذلك بشكل كبير من خلال "تجربة كرة الغولف Golf-Ball Experiment " رائد الفضاء آلان شيبارد Alan Shepard حين أدى التجربة على شاشة القمر-الأرض خلال مهمة أبولو 14 *Apollo 14* لعام 1971).

ملاحظات

1. Richard M. Sutton, "Experimental Self-Plotting of Trajectories," American *Journal of Physics*, December 1960, pp. 805–807.
2. كاتب حديث أطلق عليها بجدارة "خدعة الجاذبية A trick of Gravity". انظر: Ronald Newburgh, *The Physics Teacher*, September 2010, pp. 401–402.
3. *Mrs. Perkins's Electric Quilt*, Princeton University Press, 2009, pp. 18–23.
4. انظر، على سبيل المثال Kurt Wick and Keith Ruddick, "An Accurate Measurement of g Using Falling Balls," *American Journal of Physics*, November 1999, pp. 962–965. التقنية الموضحة في هذه الورقة (دقيقة بنسبة 0.01%) تقيس الفاصل الزمني

بين انقطاع شعاعين ضوئيين عند سقوط كرة، مع أخذ مقاومة الهواء بالاعتبار، أيضا. ويُحسب الوقت إلكترونياً بدقة جزء من المليون من الثانية.

5. للتفاصيل، انظر: Henry Klostergaard, "Determination of Gravitational Acceleration g Using a Uniform Circular Motion," American Journal of Physics, January 1976, pp. 68–69.

6. ماذا يحصل إذا كانت L أقصر من هذا الطول الحرج؟ ببساطة، لن تدور الكتلة في مسار دائري وإنما بدلا من ذلك، ستتعلق مباشرة إلى أسفل وتدور حول محورها. انظر: الورقة في الملاحظة 5 للبرهان غير الصعب جدا لهذا.

7. Francis Wunderlich, "Determination of 'g' through Circular Motion," American *Journal of Physics*, December 1966, p. 1199.

8. Albert B. Stewart, "Circular Motion," *American Journal of Physics*, June 1961, p. 373.

9. ألق نظرة على المعادلة في الإطار في الفصل 19، حين صادفنا أول مرة تكاملات القطع الناقص، في دراستنا لأنبوب النقل. الآن هذه رياضيات بحتة، وليست فيزياء، ولكن إذا كنت مهتما، يمكنك تحويل تكاملاتنا إلى الصيغة المُعرّفة لتكامل القطع الناقص من النوع الأول ومن ثم: (1) أكتب $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+a\cos(x)}}$ قم بتغيير المتغير $x = 2u$، (3) قم بحل الجبر السهل والحساب المثلثات لبيان أنّ

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+a\cos(x)}} = \frac{4}{\sqrt{1+a}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2a}{1+a}\sin^2(u)}};$$

(4) ضع $a = \frac{2}{3}$ وأوجد قيمة التكامل باستعمال الجدول الرياضياتي.

10. Thomas B. Greenslade, Jr., "Trowbridge's Method of Finding the Accel- eration due to Gravity," *The Physics Teacher*, December 1996, pp. 570–57.

11. يمكنك شراء طاولة تشغيل أسطوانات التسجيل جديدة من أمازون *Amazon* مقابل 80 دولارا تقريبا، وقد وجدت مستعملة منها على موقع إيباي eBay بسعر منخفض يصل إلى 15 دولارا.

12. فهم نيوتن، بالطبع، فكرة عجلة الجاذبية وأجرى التجارب فعليا. وكانت نتائجة بصورة "مسافة السقوط خلال ثانية واحدة"، ومع ذلك، وليس كقيمة من عدة أقدام/ثانية تربيع. وبالنهاية استقر على 196 بوصة في الثانية الواحدة، التي هي قريبة جدا من القيمة الصحيحة. (عند 32.2 قدم/ ثانية تربيع، سيسقط جسم 193.2 بوصة خلال الثانية الأولى من السقوط). انظر: ohn Herivel, The Background to Newton's Principia: *A study of Newton's Dynamical Researches in the Years 1664–84*, Oxford University Press, 1965, pp. 186–189.

13. وعادة ما يعود تاريخ هذا الإدراك إلى إراتوستينس Eratosthenes من سيرين Cyrene (276-194 قبل الميلاد). هذا هو نفسه إراتوستينس الذي، إلى جانب كونه مدير مكتبة

الإسكندرية المفقودة الشهيرة، اكتشف التقنية الأساسية لتحديد الأعداد الأولية المسماة منخل إراتوتينس *Sieve of Eratosthenes*. ويمكن العثور على قصص كل هذه الأحداث في أي كتاب جيد عن تاريخ الرياضيات.

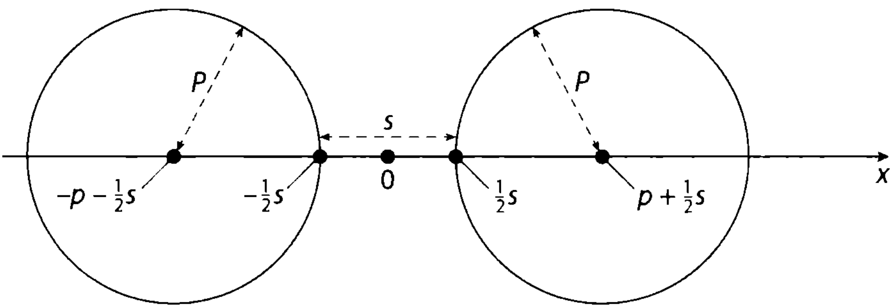
14. يمكنك العثور على هذا الاقتراح في الصفحة 418 في ترجمة آندرو موت Andrew Motte لكتاب المبادئ *Principia* (إلى الإنجليزية من اللاتينية الأصلية، لغة الاصدار العلمية العالمية في زمن نيوتن)، منشورات: مطبعة جامعة كاليفورنيا، 1934.

23 الخاتمة
خطأ نيوتن في حساب الجاذبية

"الرجل العبقري لا يرتكب الأخطاء. أخطاؤه هي... بوابات للاكتشاف".
- من كتاب أوليسس *Ulysses* لجيمس جويس (*1922*) – كلمات تصف نيوتن جيدا

في نظام العالم *The System of the World*، الكتاب الثالث من تحفته الصادرة في عام 1687، المبادئ *Principia*، يعطي نيوتن توضيحا دراماتيكيا على مدى ضعف قوة الجاذبية. ويطلب إلى القراء أن يتخيلوا كرتين متطابقتين، يبلغ كل قطر منها قدماً واحدة وبكثافة تساوي متوسط كثافة الأرض (5.5 مرة من الماء). ثم يدَّعي أنه إذا كانت الكرات، كل منها ساكن في البداية، "بعيدة ولكن بمقدار 1/4 بوصة، فإنها لن، حتى في الفراغات الخالية من المقاومة، تجتمع معا بفعل قوة الجذب المتبادل في أقل من شهر واحد.... كلا، جبال كاملة لن تكون كافية لإنتاج أي تأثير معقول".[1] ولم يقدم نيوتن أي حسابات لدعم هذا الادعاء، وفي الواقع، في أي حسابات ربما كان قد أجراها حينها يجب أن تكون خطأ. وذلك لأنّ ادعاء نيوتن ليس صحيحا، بل هو في الواقع أخطأ بعامل كبير جدا. وما يلي هو حساب حديث للوقت المطلوب لتصل الكرتين إلى بعضهما.

ويمثل الشكل 23.1 كرتي نيوتن، متمركزتين على الأصل، مع مركزيهما مبدئيا عند $x = -p - \frac{1}{2}s$ و $x = -p - \frac{1}{2}s$، حيث p هي نصف قطر كل كرة، وs هي المسافة الابتدائية الفاصلة. ومن الهندسة، إذا كان منتصف الكرة التي على اليمين عند x، حيث $0 \leq x \leq p + -\frac{1}{2}s$، من ثم، منتصف الكرة التي على اليسار هي عند $-x$. من ثم، بكتابة F كقوة الجذب



رسم توضيحي 23.1 كرتا نيوتن المتجاذبة، عند زمن $t = 0$

لكل كرة تبذلها على الأخرى، من قانون التربيع العكسي لنيوتن Newton's inverse-square law وقانون الأساسي للحركة Fundamental law of motio (القوة تساوي الكتلة ضرب العجلة)، يصبح لدينا للكرة التي على اليمين ($x > 0$)

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{m^2}{(2x)^2} = -\frac{Gm^2}{4x^2}.$$

وإشارة التعبيرين الأخيرين على اليمين سالبة لأنّ الكرة التي على اليمين تتحرك إلى جهة اليسار، باتجاه تناقص x. بذلك،

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Gm}{4x^2}, \quad 0 \le x \le p + \frac{1}{2}s.$$

والآن، نحن نريد حساب المدة الزمنية التي تستغرقها x للانتقال من $p + \frac{1}{2}s$ إلى p، عند النقطة التي تتلامس فيها الكرتان.[2]

سنبدأ التحليل الرياضياتي باستهمال التدوين النقطي للمشتقات Dot notation for derivatives، مثلما فعلنا في الفصل 19 عندما حللنا أنبوب النقل فائق السرعة. أي أنّ،

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \left(\frac{d\dot{x}}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}.$$

وبهذا تصبح معادلة الجاذبية

$$\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = -\frac{Gm}{4x^2},$$

التي يمكننا كتابتها كالتالي

$$\dot{x}d\dot{x} = -\frac{Gm}{4x^2}dx.$$

وبعد إجراء التكامل غير المحدد Integrating indefinitely ، نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{Gm}{4x} + C,$$

حيث C (في الوقت الحالي) ثابت عشوائي. ويمكننا تقييم C إذا لاحظنا أنّه للكرة في الجانب الأيمن، $\dot{x} = 0$ عند $x = p - \frac{1}{2}s$. وهذا يعني أنّ

$$0 = \frac{Gm}{4\left(p+\frac{1}{2}s\right)} + C = \frac{Gm}{4p+2s} + C,$$

وأيضا

$$C = -\frac{Gm}{4p+2s}.$$

وبذلك

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{Gm}{4x} - \frac{Gm}{4p+2s},$$

أو

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left[\frac{Gm}{2x} - \frac{Gm}{2p+s}\right] = Gm\left[\frac{2p+s-2x}{2x(2p+s)}\right]$$
$$= Gm\left[\frac{2(p+\frac{1}{2}s-x)}{2x(2p+s)}\right] = \frac{Gm}{2p+s}\left[\frac{p+\frac{1}{2}s-x}{x}\right].$$

وبحل المعادلة لإيجاد $\frac{dx}{dt}$، نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{Gm}{2p+s}\left[\frac{p+\frac{1}{2}s-x}{x}\right]} = -\sqrt{\frac{Gm}{2p+s}}\sqrt{\frac{p+\frac{1}{2}s-x}{x}},$$

فسنستخدم الجذر التربيعي السالب لأننا نعلم أنّ الكرة التي على اليمين تتحرك إلى اليسار (باتجاه تناقص x). وذلك، تكون سرعة الكرة التي على اليمين سالبة عند $x < p + \frac{1}{2}s$. ومن ثم، بفصل المتغيرات Variables، نحصل على

$$dt = -\sqrt{\frac{2p+s}{Gm}}\sqrt{\frac{x}{p+\frac{1}{2}s-x}}\,dx.$$

والآن، بينما يتغير الزمن t من 0 إلى T (الزمن الذي يحدث فيه تلامس الكرتين) نحصل على x التي تتغير من $p + \frac{1}{2}s$ إلى p. وإذاً، بعد إجراء التكامل، نحصل على

$$\int_0^T dt = T = -\sqrt{\frac{2p+s}{Gm}}\int_{p+\frac{1}{2}s}^{p}\sqrt{\frac{x}{p+\frac{1}{2}s-x}}\,dx.$$

ومن السهل إجراء بالتكامل. وإذا حددنا $c = p + \frac{1}{2}s$، وبعدها يصبح التكامل غير المحدد

$$\int\sqrt{\frac{x}{c-x}}\,dx.$$

والتي يمكننا إجراؤها بعد تغيير المتغير أولا إلى

$$u = (c - x)^{1/2}$$

ومن ثم،

$$x = c - u^2$$

حينها،

$$\frac{dx}{du} = -2u$$

وبذلك $dx = -2u\, du$ من ثم،

$$\int \sqrt{\frac{x}{c-x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{c-u^2}{u^2}}(-2u\,du)$$
$$= -2\int \sqrt{c-u^2}\,du = -2\int \sqrt{(\sqrt{c})^2 - u^2}\,du.$$

من جداول التكاملات، نحصل على

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right).$$

من ثم، بما أنّ $u^2 = c - x$، و مع $a = \sqrt{c}$، لدينا

$$\int \sqrt{\frac{x}{c-x}}\,dx = -\sqrt{c-x}\,\sqrt{x} - c\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{c-x}}{\sqrt{c}}\right).$$

وهكذا،

$$T = -\sqrt{\frac{2p+s}{Gm}}\left[-\sqrt{p+\frac{1}{2}s-x}\,\sqrt{x} - \left(p+\frac{1}{2}s\right)\right.$$
$$\left.\times \sin^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{x}{p+\frac{1}{2}s}}\right)\right]\Bigg|_{p+\frac{1}{2}s}^{p}$$
$$= \sqrt{\frac{2p+s}{Gm}}\left[\sqrt{\frac{1}{2}s}\,\sqrt{p} + \left(p+\frac{1}{2}s\right)\sin^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{p}{p+\frac{1}{2}s}}\right)\right].$$

أو، أخيرا،

$$T = \sqrt{\frac{2p+s}{Gm}}\left[\sqrt{\frac{1}{2}ps} + \left(p+\frac{1}{2}s\right)\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2}s}{p+\frac{1}{2}s}}\right)\right].$$

ويجب عليك أنّ تتأكد من أنّ الطرف الأيمن للنتيجة الأخيرة صحيحة الأبعاد، أي أنّ وحداتها هي الثواني.

لمسألة نيوتن، لدينا

$p = \frac{1}{2}$ قدم=0.1524 متر

$s = \frac{1}{4}$ بوصة=0.00635 متر

$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi$ (0.1524 متر)^3

5.500 x كغم/متر^3 = 81.547 كغم

و

$Gm = 6.67 \times 10^{-11}$ م^3/(كغم/ثانية تربيع)×81.547 كغم

إذن،

$$T = \sqrt{\frac{0.311}{54.4 \times 10^{-10}}} \left[0.022 + 0.1556 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{0.003175}{0.1556}} \right) \right]$$ ثواني

= 335 ثواني

بما أنّ $\frac{1}{12}$ من السنة ("شهر" نيوتن) من سنة مكونة من 365 يوماً لها 2,628,000 ثانية نرى أنّ نيوتن كان على خطأ بعامل نحو 8,000!

وآخر تعبير لنا عن T، هو بلا شك معقد إلى حد ما. لأنّه نتيجة دقيقة صالحة لجميع قيم s، p وm، ولكن إذا كنا بالاستفادة من حقيقة أنّ s صغيرة في مسألة نيوتن، بعدها يمكننا الحصول على نتيجة أبسط بكثير. وهذا تحقق مفيد على التعبير الدقيق، وهي تقنية غالبا ما يستخدمها الفيزيائيون للحصول على ثقة إضافية في نتيجة محددة. الفكرة بسيطة: إذا وجدت كتلتا نقطة متطابقتان ويبعدان عن بعضها البعض مسافة r، فستكون قوة جذب الابتدائية على كل منهما هي

$$F = \frac{Gm^2}{r^2}.$$

وهذه القوى الجاذبية تسرّع الكتلتين معا، وبينما يقتربان من بعضهما، تقل المسافة r وتزيد بذلك القوة F، ومن ثم تزداد العجلة. ولكن إذا، في مسألة نيوتن، المسافة التي تقطعها كل كتلة "صغيرة" مقارنة بـ($\frac{1}{8}$ بوصة لنيوتن، نصف $\frac{1}{4}$ = s بوصة)، إذ إنه من التقريب المعقول أن نعتبر العجلة كقيمة ثابتة Constant من البداية إلى النهاية.

من الشكل 23.1 البعد الابتدائي بين مركزي الكرتين هو:

$$r = 2\left(p + \frac{1}{2}s\right) = 2p + s.$$

والعجلة الابتدائية هي a، حيث

$$F = ma = \frac{Gm^2}{r^2}.$$

ومن ثم

$$a = \frac{Gm}{r^2} = \frac{Gm}{(2p+s)^2},$$

التي سنأخذها (كما شرحنا أعلاه) كثابت بينما تتحرك كل كرة خلال مسافة $d = \frac{1}{8}$ بوصة.

والزمن T' للتحرك مسافة d، من السكون، بعجلة a ثابتة، هي كما رأينا سابقا في هذا الكتاب، مُعطاة

$$d = \frac{1}{2}aT'^2.$$

أو

$$T' = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{\frac{Gm}{(2p+s)^2}}},$$

أو بما أنّ $d = \frac{1}{2}s$،

$$T' = (2p+s)\sqrt{\frac{2d}{Gm}} = (2p+s)\sqrt{\frac{s}{Gm}}.$$

وهذا التعبير للزمن T' أبسط بكثير من الذي للزمن T، ولكن سأتذكر أنّ T' هي قيمة تقريبية. لذا، ما تعطي T'، عدديا؟

باستخدام قيم p و m، s التي حسبناها سابقا، نحصل على

$$T' = (2 \times 0.1524 + 0.00635)\sqrt{\frac{0.00635}{54.4 \times 10^{-10}}} = \text{ثواني } 336 \text{ ثانية}$$

التي تفرق ثانية واحدة عن T، نتيجتنا الدقيقة! T' هي، في الواقع، تقريب ممتاز (لمسألة نيوتن).

ومن المؤكد أنه من غير المحتمل أن تكون هذه المناقشة بأكملها مسألة قد تطرأ في محادثة يومية. وبدلا من ذلك، هي نوع من المسائل التي يجدها الفيزيائيون فقط آسرة. ولكنني أدرجتها هنا على أي حال لأنّ أحد هؤلاء الفيزيائيين تصادف أن يكون نيوتن العظيم، وآخر (آمل) هو أنت، وأيضا لأنه يمكن التوصل إليها تماما باستخدام الفيزياء والرياضيات البسيطة.

ولا تعني "الفيزياء البسيطة" الفيزياء بسيطة-التفكير، وإذا كان هذا الكتاب قد أقنعك بذلك، إذا فعملي هنا قد انتهى.

ملاحظات

1. يمكنك العثور على هذا الاقتباس في صفحة 570 في Andrew Motte's 1729 translation of the Principia, published by the University of California Press in 1934.
2. نحن نستعمل إحدى نتائج نيوتن الأخرى، أيضا: تأثير الجاذبية لكرة ذات كثافة منتظمة في أي نقطة خارج الكرة هي نفس تأثير كتلة نقطية في مركز الكرة بكتلة الكرة نفسها (انظر: الفصل 5).

ملحق

أعتقد أنّ الشيء الذي افتقدته في الكتاب، وكان سيوفر منظورا شاملا لطيفا يربط عددا من الفصول ببعضها، هو تحليل الأبعاد Dimensional analysis أو الحجة المبنية على الأبعاد Dimensional reasoning. ولقد وجدت أنّه مفيد جدا في تدريس المستويات المبتدئة والمتقدمة. ويستمتع به الطلبة جزئيا لأنه يمكن أن تتوصل إليه بطرق كثيرة دون إجراء أي حسابات مفصلة.

- توم هليويل *Tom Helliwell*، أستاذ فيزياء بيرتون بيتينغن *Burton Bettingen Professor of Physics*، الفخري، في كلية هارفي مود *Harvey Mudd College*، في رسالة بالبريد الالكتروني إلى المؤلف بعد قراءة المسودة الأولية لهذا الكتاب.

من المفترض أن تكون الخاتمة هي نهاية الكتاب، ولكن، حسنا، لا تجري الأشياء في بعض الأحيان كما هو مخطط لها. ومع اقتراب هذا الكتاب من الاكتمال، سألت توم هليويل، وكان زميلي عندما درّست في كلية هارفي مود (كلاريمونت، كاليفورنيا) في أوائل سبعينات القرن الـ20، إذا كان سينظر في كتابة مقدمة للكتاب. وبطبيعة الحال، كما تعلمون وافق لأنها ستكون في الجزء الأمامي من الكتاب، ولكن توم لم يقم بتصفح الكتاب لإلقاء نظرة سريعة عليه وبعدها يكتب بعض الكلمات الجميلة مثل، "كتاب عظيم، اشتريه سيعجبك، حتى ولو لم يعجبك، فهو كبير بما فيه الكفاية ليكون مسندا للباب".

كلا، فقد قرأه توم وكانت لديه بعض المخاوف، ولا أستطيع مراوغة أي منها وإنكار أنه كان على حق. فقد كنت قادرا على حلها كلها ماعدا قبل أن يذهب كل شيء إلى تحرير النسخ. ولكن هذا الاستثناء الوحيد الذي استوقفني كونه أساسياً جدا لما حاولت عمله هنا (وكان يجب على أن أفكر فيه بنفسي) وأعتقد أنّ هذه الحاشية، كما اقترح توم، تضيف الكثير إلى الكتاب.

أنا، كما خمنت بلا شك من الاقتباس الافتتاحي، أتحدث عن تحليل الأبعاد Dimensional analysis. لقد تناولت هذا الموضوع، بإيجاز، في كتاب سابق، لذلك اسمح لي بأن أبدأ بتكرار ما كتبت هناك: [1]

عندما كنت طالبا مستجدا في مقرر فيزياء 51 في ستانفورد Stanford قبل أكثر من 55 عاما، مررت بالكثير من الامتحانات، ولكن واحدا على وجه الخصوص مازال في ذاكرتي. وصف

أحدُ أسئلة ذلك الامتحان وضعا فيزيائيا الذي، في النهاية، كانت المسألة تستدعي حساب المدى الذي يصل إليه السائل في أنبوب زجاجي بواسطة الخاصية الشعرية Capillary action. كان السؤال هدية، سؤال واحد وضعه الأستاذ في الامتحان ليحصل الجميع على بداية جيدة؛ وللإجابة عنه كل ما عليك هو تذكر الصيغة التي اشتُقّت في المحاضرة، وفي نص كتاب المقرر، والتي كنا قد استخدمناها مرتين على الأقل في الواجبات المنزلية. كل ماتطلبه الامتحان هو وضع الأرقام في الصيغة. وكان الأستاذ لطيفا إذ قدم إلينا جميع الأرقام، أيضا. ولسوء الحظ، لم أتمكن من تذكر الصيغة ولهذا، لم أحصل على الدرجات الهدية.

في وقت لاحق، في سكن الطلبة، كنت أتحدث إلى زميل لي في المقرر الدراسي، الذي كان في غاية الامتنان لهذا السؤال الهدية. لم يكن مستواه جيدا في المقرر، والنقاط "المجانية" كانت لطيفة.

سألت: "إذا تذكرت الصيغة، أليس كذلك؟".

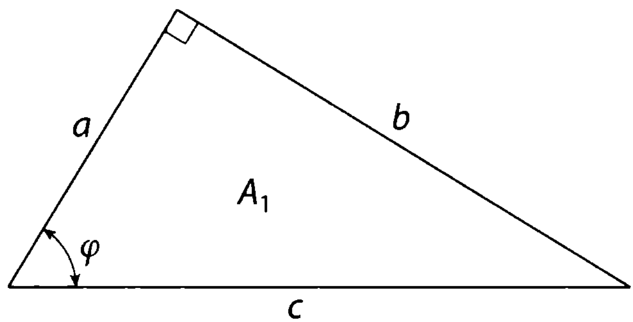
وأجاب: "لا، ولكن لم يكن عليك ذلك. لقد نجحت في ذلك على أي حال".

ثم سألت: "ماذا تعني، بأنّه لم يكن عليك تذكر الصيغة؟"، مع شعور قابض في معدتي.

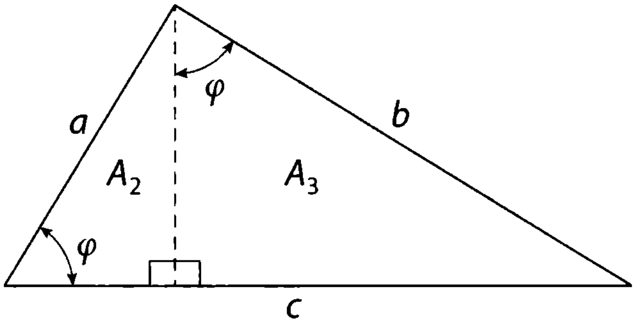
"كل ما عليك فعله، " قال صديقي مبتسما لي:" هو مجرد أخذ كل الأرقام المختلفة التي أعطانا إياها الأستاذ وتجربها بطرق مختلفة حتى تجد الوحدات كالطول، والمسافة إلى أعلى الأنبوب. " ولكن، ولكن،" أجبت متلعثماً: 'هذا، هذا... غش!"

ولكن، بالطبع، لم يكن ذلك غشا. كنت فقط مستاء من نفسي لعدم كوني فطنا بما فيه الكفاية للتفكير بالفكرة نفسها التي توصل إليها صديقي. وكان ذلك أول مقدمة (مؤلمة) للتقنية القيّمة في تحليل الأبعاد. وهنا، من ثم، كمثال آخر للفكرة، هي كيفية اشتقاق الفيزيائي لنظرية فيثاغورس Pythagorean Theorem باستخدام تحليل الأبعاد.[2]

يُظهر الشكل PS1 مثلثاً قائماً مع جوانب متعامدة ذات أطوال a و b ووتر بطول c. وإحدى الزوايا الداخلية الحادة للمثلث هي $\varnothing$.



الرسم التوضيحي PS1 اشتقاق نظرية فيثاغورس بتحليل الأبعاد (a)



الرسم التوضيحي PS2 اشتقاق نظرية فيثاغورس بتحليل الأبعاد (b)

وأعتقد أنه من الواضح أنه يمكن تحديد المثلث بمجرد أن نعرف قيمة c و $ø$. أي أنّ، لقيمة معطاة c وقيمة معطاة $ø$، وأطوال الجوانب الأخرى (a و b) والزاوية الداخلية الحادة المتبقية كلهم لديهم قيم فريدة. وبالتأكيد، حينها، المساحة A_1 للمثلث أيضا يمكن تحديدها. بما أنّه للمساحة وحدات من الطول المربع، وبما أنّ $ø$ عديمة الأبعاد، يجب أن تكون المساحة معتمدة على مربع c. لذلك، لنكتب مساحة مثلثنا كالتالي:

$$A_1 = c^2 f(ø) \qquad (1)$$

فـ $f(ø)$ هي دالة للزاوية $ø$. (ليس من المطلوب، كما سترى قريبا، منا معرفة الطبيعة التفصيلية للدالة $f(ø)$!)

والآن نرسم الخط العمودي من الزاوية القائمة إلى الوتر للمثلث، كما هو موضح في الشكل PS2. وهذا يقسم المثلث إلى مثلثين صغيرين بزوايا قائمة، واحد بمساحة A_2، وزاوية حادة $ø$، ووتر a، والثاني بمساحة A_3 وزاوية حادة $ø$، ووتر b. وبذلك، كما في (1)، يمكننا كتابة

$$A_2 = a^2 f(ø) \qquad (2)$$

و

$$A_3 = b^2 f(ø) \qquad (3)$$

بما أنّ $A_1 = A_2 + A_3$، إذاً $c^2 f(ø) = a^2 f(ø) + b^2 f(ø)$، وبذلك يمكن إلغاء الدالة المجهولة $f(ø)$ (لهذا السبب لم يكن علينا معرفة ما هي)، ونحصل فجأة، دراماتيكيا من الفراغ كما يبدو، على المعادلة المعروفة

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (4)$$

هكذا فقط. أنيق جدا، ألا تعتقد ذلك؟" (ومن السهل إظهار أنّ $f(\phi) = \frac{1}{2}\cos(\phi)\sin(\phi)$ - ويجب أن ترى إن كنت تستطيع إجراء ذلك – ولكن الفكرة هنا هي أنه ليس عليك إظهاره!)

ولكن هذه رياضيات فقط، قد تقول- ما رأيك بمثال آخر من الفيزياء لتحليل الأبعاد، إضافة إلى فرصتي الضائعة، من عقود مضت، للحصول على نقاط إضافية في الامتحان؟ حسنا، إليك ثلاث. سأبدأ بما حدده الأستاذ هيليويل HelliwelProfessor في الإيميل الذي أرسله إلي، عن التحليل المذكور في افتتاح الفصل 22. إليك ما كتبه: ما القيم التي من الممكن أن تعتمد عليها R غير m، g، h، وα؟ فليس هناك أي حدود مهمة في المسألة.[3] فالزاوية α عديمة الأبعاد Dimensionless، إذاً ليست هناك حدود أخرى يمكن أن تلغي وحدة الزمن في g، وبذلك لا يمكن أن تكون g في الحل. ولا يمكن أن تعتمد النتيجة أيضا على m، لأنّه لا يوجد شيء يلغي وحدتها". لذا يجب أن تكون R دالة من h و α فقط. ولكن للحصول على الإجابة المحددة التي استنتجناها في الفصل 22، عليك فعلا أن تخوض في تفاصيل التحليل. ولكن توم Tom على حق- فغياب g في هذه الحالة، من التحليل ذي الأبعاد وحده ليس بالأمر الغريب.

ولمثال ثانٍ في الفيزياء، تخيل رملا يتساقط عبر فتحة دائرية، كما في الساعة الرملية. متألفا من العديد من الجزيئات الصغيرة جدا والصلبة، يتدفق الرمل خلال الفتحة كما السائل. ولكن لا يشبه السائل. بسبب الاحتكاك بين الجزيئات نفسها، والجزيئات الخارجية وجدران الساعة الرملية، ومعدل التدفق (الكتلة لكل وحدة زمن) تُلاحظ ثابتة تقريبا – ميزة لطيفة لأداة توقيت! وهذا يعني، تحديدا، أنّ معدل التدفق لا يعتمد على ارتفاع عمود الرمل الذي ينتظر أن يعبر خلال الفتحة. هذا مختلف جدا عن سلوك الماء المتدفق من حفرة أسفل دلو، على سبيل المثال، فيعتمد معدل الدفق على "منسوب الماء" Water Head. والمقاييس Parameters المتبقية التي قد تؤدي دورا في معدل التدفق هي، إذَن: كثافة الرمل ρ، وقطر الفتحة D، وعجلة الجاذبية g.

لذلك، لنكتب

$$\frac{dm}{dt} = f(\rho, D, g) \tag{5}$$

حيث f دالة ما. والكلمة ما تترك مساحة للتحرك، ماذا يمكن أن نقول عن f؟ ما سنفعله هو اعتبار f كناتج قوى المتغيرات، أي أنّ مثل

$$f(\rho, D, g) = K\rho^{a} D^{b} g^{c}$$

حيث K، a، b و c قيم ثابتة من دون أبعاد. سنفعل ذلك لأنّ، مهما تكون f، فاعتماد وظيفتها على المتغيرات يجب أن يكون مستقلا عن اختيار وحدات معينة لقياس الطول، والزمن والكتلة. فالطبيعة على أي حال لا تكترث إذا قسنا بالبوصات أو الأمتار، بالثواني أو الأيام، أو بالغرامات أو الأرطال.

لرؤية ما إذا كانت الصيغة الوظيفية التي افترضناها للدالة f تمتاز بهذه الصفة، لاحظ أنه إذا

قسنا الكتلة في نظام وحدات واحد، ومرة أخرى بنظام جديد بوحدة أكبر x من المرات، فسيكون قياس الكتلة الجديد $1/x$ من المرات من القياس الأول. وبالطريقة نفسها، إذا جعلنا y و z كعدد المرات التي تكون فيها وحدات الطول والزمن أكبر، على التوالي، في النظام الجديد، فإنّ تلك القياسات الجديدة ستكون على وجه الشبه أيضا مرتبطة بالقياسات القديمة بمعاملات $1/y$ و $1/z$، على التوالي. وبكتابة f كناتج للقوى يحفظ استقلال عملها ويحرك تأثير تغيير الوحدات إلى الثابت K. لذا، بما أننا نعلم بمشاركة K لنتجاهلها في الوقت الحالي ولنركز على الصيغة الوظيفية للدالة f. وعندما ننتهي من تحديد ذلك، سنقوم فقط بإدخال K مع فهم أنّ قيمتها (وتُحدد من التجربة) تعتمد على نظام الوحدات الذي قدر لنا استعماله.

إذا كتبنا M، L و T لأبعاد الكتلة، والطول والزمن، على التوالي، إذا على الطرف الأيسر من (5) تكون الوحدات $\frac{M}{T}$. وبما أنّ ρ, D, g يعطون الوحدات $\frac{M}{L^3}$، L، $\frac{L}{T^2}$ على التوالي، إذا مع القيم الثابتة a و b و c يجب أن نحصل على

$$\frac{M}{T} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a (L)^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^c = \frac{M^a L^{b+c-3a}}{T^{2c}}.$$

أي أنّ، $a = 1, b + c - 3a = 0$، و $2c = 1$. وهذه العلاقات تُختصر بسهولة إلى $a = 1, b = \frac{5}{2}$، و $c = \frac{1}{2}$. وبذلك، مع كون K ثابت ما (التي يمكن إيجادها من التجربة)،

$$\frac{dm}{dt} = Kpg^{1\backslash 2}\, D^{5\backslash 2} \qquad (6)$$

وربما يكون أس D مفاجأة كبيرة. إذا اعتمد معدل التدفق على مساحة الفتحة، فافتراض تخمين أولي منطقي، سيكون الأس 2 وليس 2.5. ولكن التجارب الفعلية لتدفق رمل عبر قياسات مختلفة من الفتحات تبين أنّ (6) هي، في الحقيقة، صحيحة.[4]

ويأتي مثالي الأخير، الدراماتيكي جدا في تحليل الأبعاد في الفيزياء من قصة واقعية حدثت في الحرب العالمية الثانية. ففي عام 1941 أخبر الفيزيائي الرياضياتي الإنجليزي السير جيفري تايلور Sir Geoffrey Taylor (1886-1975) بإمكانية وجود قنبلة خارقة، وطلبت إليه السلطات العسكرية البريطانية أن يفكر في فيزياء انفجار كبير جدا. وهذا ما أنجزه بطريقة مثيرة للإعجاب، ولكن لم يدرك العالم خارج الدوائر السرية العليا لأبحاث الأسلحة إلى أي مدى يمكن للفيزياء البسيطة أن تأخذك إلا بعد 10 سنوات من ذلك.

في 16 يوليو 1945 عندما فُجّرت القنبلة الذرية الأولى، وهي جهاز تفجير داخلي للبلوتونيوم Plutonium Implosion Device،[5] في صحراء ألاموغوردو Alamogordo Desert، بنيو مكسيكو New Mexico، صُور هذا الحدث التاريخي (أطلق عليه رمز ترينيتي Trinity) باستخدام كاميرا رصد الحركة ذات السرعة عالية (10 آلاف لقطة/ثانية). وفي عام 1947 رُفع حظر السرية عن الفيلم، ونشرت في جميع أنحاء العالم الأطر الفردية التي تظهر الكرة النارية المتوسعة. وكل إطار قد وُضع عليه بشكل مناسب لحظيا نصف قطر[6] الكرة النارية المثالية تقريبا، جنبا إلى جنب مع الوقت المقاس من لحظة التفجير. ولكن لم تُرفع السرية عن واحدة من المعلومات، وكانت تلك هي طاقة الانفجار. فقد قررت السلطات الأمريكية أن تبقى ذلك

سريا جداً. لذا، كان من المفاجئ لتلك السلطات عندما، في 1950، استخدم تايلور تحليل الأبعاد النظرية في عام 1971، مجتمعة مع الصور المنشورة من قبل 3 سنوات، لقياس طاقة القنبلة بدقة. وإليك كيف أدى ذلك.[7]

بجدل أنّ نصف القطر R للكرة النارية قد يكون دالة لطاقة الانفجار E_0 وكثافة الهواء ρ الذي ستتوسع فيها الكرة النارية، والزمن t منذ لحظة الانفجار، كتب تايلور المعادلة التالية:

$$R = K E_0^{1/5} \rho^{-1/5} t^{2/5}, \qquad (7)$$

وبتعيين الأبعاد على الطرف الأيسر من (7) مساوية لأبعاد الطرف الأيمن (تذكر، K عديم الأبعاد، على الرغم من اعتماد قيمته على نظام الوحدات المستخدم)، يصبح لدينا[8]

$$L = \left(\frac{ML^2}{T^2}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b T^c = M^{a+b} L^{2a-3b} T^{c-2a}.$$

وهذا، $a + b=0$، $2a - 3b = 1$ و $c - 2a=0$، نظام من المعادلات يسهل حلها لإيجاد $a = 1/5$ و $b = -1/5$ و $c = 2/5$. إذاً،

$$R = K E_0^{1/5} \rho^{-1/5} t^{2/5},$$

أو بما أنّه كانت لتايلور أدلة تجريبية على أنّ في نظام الوحدات م/كغم/ث MKS (متر Meters كيلو Kilograms ثانية Seconds) تكون قيمة $K \approx 1$، نحصل على

$$R = \left(\frac{E_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}. \qquad (8)$$

وبالنظر إلى السهولة النسبية التي توصلنا فيها إلى الخطوة (8)، هناك حقا كمية مذهلة من المعلومات فيها. فعلى سبيل المثال، إذا قمنا ببناء قنبلتين ولأحداهما خمسة أضعاف الطاقة المتفجرة من الآخرى، ثم في أي وقت معين بعد التفجير (لكثافة هواء ثابتة) لن تكون الكرة النارية للقنبلة الأكبر خمسة أضعاف ولكن، بدلا من ذلك، ستكون أكبر بعامل $5^{1/5} \approx 1.38$ "فقط". أو إذا انفجرت قنبلة في ارتفاع عالٍ، فتكون كثافة الهواء ثلث كثافته على الأرض، لن تكون الكرة النارية الناتجة في أي وقت بعد التفجير ثلاث مرات أكبر من الكرة النارية المنفجرة على الأرض ولكن، بدلا من ذلك، ستكون أكبر بمعامل من $1.24 \approx 3^{1/5}$ فقط.

لرؤية ما إذا كانت الخطوة (8) تصف حقا ما حدث في انفجار 1945 طبّق تايلور الخوارزمية على الطرفين وكتب

$$\log_{10}(R) = \frac{1}{5}\log_{10}\left(\frac{E_0}{\rho}\right) + \frac{2}{5}\log_{10}(t), \qquad (9)$$

التي تقول إنّ الرسم البياني للخوارزمية $\log_{10}(R)$ مقابل $\log_{10}(t)$ يجب أن يكون خطا مستقيما مع ميل يساوي 2/5. وعندما رسم تايلور نصف القطر والأزمنة المكتوبة المعطاة في الشريط غير السري لصور القنبلة حصل على خط مستقيم مثالي واقعي. وكما كتب في ورقته، "الكرة النارية توسعت عن كثب وفقا للتنبؤ النظري الذي جرى قبل أكثر من أربع سنوات من وقوع الانفجار". وكان هذا التوافق الممتاز بين النظرية والتجربة ملحوظا جدا، فإن مجموعة القيم لكلا R و t كانت "كبيرة" تحديدا، $11.1 \le R \le 185.0$ (بالمتر) خلال الفترة $0.0001 \le t \le 0.062$

والآن، كيف حصل تايلور على قيمة E_0؟ وبكتابة (9) كالتالي

$$5\log_{10}(R) - 2\log_{10}(t) = \log_{10}\left(\frac{E_0}{\rho}\right)$$

يمكننا إدخال أي زوج من القيم للقيم R و t المعطاة في صور التفجير. لذا، باستخدام (على سبيل المثال) R=185 متر حين t= 0.062 ثواني، نصل إلى

$$\log_{10}\left(\frac{E_0}{\rho}\right) = 13.75.$$

وبذلك

$$E_0 = \rho 10^{13.75}.$$

وقد استخدم تايلور ρ = 1.25 كيلوغرام/ متر مكعب لكثافة الهواء، وبذلك

$E_0 = 1.25\times10^{13}\times10^{0.75} = 10^{13} \times 7.03$ جول

فنعرف أنّ وحدات E_0 هي وحدات MKS (متر Meters كيلو Kilograms ثانية Seconds) للطاقة (جول Joules) لأنّ كل الكميات الأخرى تقاس بالوحدات MKS.

ومن المتفق عليه هو ذكر طاقة الانفجار الذري (ما يسميه مهندسو الأسلحة "الحصيلة" Yield) بوحدات الطن المتري Metric Tons من المادة المتفجرة تي أن تي TNT، وهذا ما فعله تايلور. (الطن المتري يساوي 1 ألف كيلوغرام ≈ 2.200 رطل). وبما أنّ 1 رطل من TNT يحرر 1.9×10^6 جول من الطاقة، إذا 1 طن متري يحرر 4.18×10^9 جول، وبذلك

$$E_0 = \frac{7.03 \times 10^{13}}{4.18 \times 10^9}$$ طن متري من تي أن تي = 16,818 طن متري من تي أن تي.

هذا هو تقريبا العدد الذي يظهر في ورقة تايلور (16800 طن). وهو قريب جدا من القيمة التي تعتقد السلطات الأمريكية أنها القيمة الحقيقية، السرية، لطاقة القنبلة ترنتي Trinity، التي كان يعتقد لفترة من الوقت أنّ تايلور قد خرق الأمن العسكري.

لكنه لم يفعل ذلك. كان ذلك كله "فيزياء بسيطة فقط".

ملاحظات

1. Mrs. *Perkins's Electric Quilt*, Princeton University Press, 2009, pp. 13–15. وقد كان تحليل الأبعاد موجودا في الفيزياء لفترة طويلة. وهي في العادة تؤرخ بورقة من عام 1863 للفيزيائي الأسكتلندي الكبير جيمس كليرك ماكسويل James Clerk Maxwell (1831-1879)، ولكن يمكنك العثور على تلميحات منها في كتابات نيوتن.
2. صادفت هذا الاشتقاق عندما كنت أتصفح كتاب A. B. Migdale, *Qualitative Methods* in Quantum Theory, W. A. Benjamin, 1977 (نُشرت في الأصل باللغة الروسية في 1975).
3. حسنا، قد تُجيب، ماذا عن v_0، سرعة القذف؟لكن، لا يعُد ذلك كمعامل، لأنّه في هذه المسألة هي، أيضا، تُحدد كليا بواسطة h، g و m. كانت معاملا في المسائل السابقة، كإطلاق رصاصة من مسدس، منذ ذلك الحين لم تعتمد v_0 فقط على m و g وإنما على كمية البارود المستخدم.
4. Metin Yersel, "The Flow of Sand," *The Physics Teacher*, May 2000, pp. 290–29.
5. كانت القنبلة الذرية الأولى ("الصبي الصغير" Little Boy) التي استخدمت في الحرب، وأُسقطت على هيروشيما Hiroshima في اليابان، قنبلة مدفعية من اليورانيوم Uranium Gun Bomb (كتلتان دون الحرجة مفردتان من اليورانيوم U-235، تصطدمان ببعضهما، فتُطلق إحداها من مدفع على الأخرى، لتشكل سريعا كتلة أكبر من الكتلة الحرجة). وكان العلماء على يقين من أنّ ذلك سيعمل لدرجة أنهم لم يكلفوا أنفسهم عناء اختبار التصميم. والقنبلة الثانية ("الرجل السمين" Fat Man) التي أُلقيت على ناغازاكي Nagasaki في اليابان كانت قنبلة انفجار داخلي أكثر تعقيدا بشكل كبير (كتلة كروية دون الحرجة من البلوتونيوم Plutonium تنضغط فجأة للوصول إلى الدرجة الحرجة بواسطة الموجات الصدمية المتحركة إلى الداخل والناتجة من غلاف من المتفجرات العالية السرعة والمتزامنة تسمى "العدسات" Lenses والموجودة على سطح الكرة).
6. نصف كروية *Hemispherical* لأنّ القنبلة انفجرت 100 قدم فقط فوق مستوى الأرض (في أعلى البرج). ومن شأن انفجار قنبلة على ارتفاعات عالية، بطبيعة الحال، أن ينتج كرة نارية كروية.
7. Sir Geoffrey Taylor, "The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion (part 2): The Atomic Explosion of 1945," *Proceedings of the Royal Society of London* A, March 22, 1950, pp. 175–186. يحتوي الجزء الأول من ورقة تايلور المكونة من جزأين على عمله النظري في عام 1941، على الصفحات 159-174. أمّا الجزء 2؛ فيعيد تقديم بعض من الصور الفوتوغرافية للكرات النارية التي رُفعت السرية عنها واستخدمها تايلور.
8. ولنرى أنّ وحدات الطاقة هي $\frac{ML^2}{T^2}$، تذكر أنّ الطاقة = القوة x المسافة = الكتلة x العجلة x المسافة، وبذلك تكون وحدات الطاقة هي $\frac{ML^2}{T^2} = (M)(\frac{L}{T^2})(L)$.

شكر وتقدير

كان هناك الكثير من الناس الذين ساعدوني ليصل هذا الكتاب بين يديك. وقد قمت بالبحث عن الكثير من المادة الأدبية المبكرة في مكتبة الفيزياء Physics Library في جامعة نيو هامبشاير University of New Hampshire، وقدمت أمينة المكتبة لكتب الفيزياء هيذر غاغنون Heather Gagnon إليّ مساعَدة كبيرة عبر الأيام العديدة التي جلست فيها بين أكوام الكتب للقراءة. وبعد مغادرة المكتبة والمشي إلى اتحاد الطلبة، حرص طاقم العاملين في دونكين دونتس Dunkin' Donuts بالحرم الجامعي على أن أكون مرتويًا بالقهوة (ومستيقظًا جدًا) بينما أكتب.

وكان الناس في مطبعة جامعة برينستون Princeton University Press، بالتأكيد، ذوي دور حاسم جدًّا، بدءًا من محررتي التي استمرت معي فترة طويلة الخارقة فيكي كيرن Vickie Kearn ومساعدتها بيتسي بلومنثال Betsy Blumenthal، ومحررة الإنتاج ذات أفضل كفاءة ديبورا تيغاردن Deborah Tegarden، وفنانين الصحافة الموهوبين ديميتري كاريتنيكوف Dimitri Karetnikov وكارمينا ألفاريز-غافن- Carmina Alvarez-Gaffin الذين حوّلوا محاولاتي المبتدئة في رسم خط مستقيم إلى، حرفيًا، أعمال فنية.

وقد منعتني محررة النسخ، باربرا ليغوري Barbara Liguori في توكسون Tucson بولاية أريزونا Arizona، من أن أبدو كشخص ينام أثناء حصص اللغة الإنجليزية في المدرسة الثانوية (الذي، للأسف، أعتقد أنني فعلت ذلك بين الحين والآخر). كما ذكرتني باربرا أيضًا لماذا قد تكون القيادة في ولاية أريزونا وكاليفورنيا محفوفةً بالمخاطر (انظر التعليق أخيرًا في الحاشية الوحيدة للفصل 2).

قدم ثلاثة مراجعين مجهولين العديد من الاقتراحات المفيدة. وقد وافق زميلي السابق في كلية هارفي مود Harvey Mudd College ، في كليرمونت Claremont، بكاليفورنيا، الفيزيائي توم هليويل Tom Helliwell بكرم على كتابة مقدمة ورفض بشدةٍ قبول أي مقابل مالي ما عدا شكري له ونسخة من الكتاب.

وأخيرا، زوجتي منذ 54 عاما، باتريشيا آن Patricia Ann، أيدت دائمًا حياة الكتابة الخاصة بي، وبينما لن أتوقف أبدًا عن المحاولة، فأنا أعلم بأنني لن أكون قادرًا على أن أشكرها بما فيه الكفاية.

بول ناهن *Paul Nahin*
لي، نيوهامبشر *Lee, New Hampshire*
أغسطس 2015

ملاحظة: أشكر بامتنان آنا كاريتنيكوف Anne Karetnikov على القطة الغريبة الرائعة الموجودة في رسمة غلاف الكتاب. والنظرة على وجه القطة تعكس، بالضبط، الروح التي كُتبت فيه هذا الكتاب.

علوم مُبسّطة/ فيزياء

بمقدور الفيزياء تفسير العديد من الأشياء التي نراها. إذ يُمكنها أن تُخبرنا بماذا يكون الليل حالكًا، وما الذي يُسبب المدّ والجزر، وأيضًا ما هي الطريقة المناسبة لالتقاط كرة البيسبول. ومع كتاب في مديح الفيزياء البسيطة *In Praise of Simple Physics*، يُقدّم كاتب الرياضيات والعلوم المُبسّطة بول ناهِن Paul Nahin مجموعة كبيرة من الحالات التي تستكشف العلوم والرياضيات الكامنة في عجائب الحياة اليومية. وبالتجوّل عبر مجموعة متنوعة من الألغاز، يعرِض الكاتب كيف تُرينا الفيزياء طُرُقًا لاستخراج المزيد من طاقة المصادر المُتجددة، والكيفية التي نعرف بها أي المفاتيح تتحكّم في إضاءة العليّة، والكثير. إذ يبدأ ناهِن بمسائل بسيطة ثم يتقدّم إلى أسئلة أكثر تحديًا، حيث تتخلّل تفسيراتهُ المُسليّة، والمُيسّرة، والبليغة رياضياتيًا وعلميًا حسه الفكاهي الذي لطالما اشتهر به. ومن المفترض أن يمتلك القُرّاء خلفية بسيطة عن مبادئ الاشتقاق والتكامل في الحسبان. وإذا لديك ببساطة اهتمام شخصي في معرفة تأثير الفيزياء في العالم أو مازلت تدرس الهندسة والعلوم وتريد معرفة المزيد عن الكيفية التي تعمل بها الفيزياء، فهذا الكتاب يحتوي على تصوّر مثير للفضول.

"أسلوب كتابة ناهِن، كما في كُتبه السابقة، واضح، حواري، فكاهي وحافل بالحديث.... [و] المناقشات في الكتاب حذِرة ودقيقة بشكل مناسب."

- أم أي أي ريفيوز MAA Reviews

"فيزياء ممتعة، وسهلة [بالإضافة] إلى مسائل رياضياتية مع بعض الفكاهة."

- ماث∞ بلوغ Math ∞Blog

"يعرف [ناهِن] كيف يجذب انتباه قارئه. لن تندم على شراء أي من كُتبه، وأنا متأكد أنه بعد قراءتها، ستعيد فتح هذا الكتاب للتأكد مرة أخرى من أحد نماذج وطُرق الحل الخاصة به."

- الجمعية الرياضياتية الأوروبية European Mathematical Society

"كتاب رائع.... [ي]عرض طُرُقًا ذكية لحل مسائل الفيزياء ببساطة."

- تشويس Choice

بول جاي. ناهِن PAUL J. NAHIN هو بروفيسور فخري بالهندسة الكهربائية في جامعة نيو هامبشاير University of New Hampshire. ومؤلف العديد من كتب الرياضيات المُبسّطة الأعلى مبيعًا، بما فيها ديجيتال دايس *Digital Dice*، تشايسس أند إسكايبس *Chases and Escapes*، دكتور إيولر فابيولس فورميولا *Dr. Euler's Fabulous Formula*، وين ليست إز بيست *When Least is Best*، ديولنغ إديوتس آند أذر بروبابيليتي بزلرز *Duelling Idiots and Other Probability Puzzlers*، وآن إماجينري تيل *An Imaginary Tale* (جميعها من إصدار برينسيتون Princeron).

KFAS | إحدى شركات Company | aspd الدار العلمية للنشر